



TITLE:

流出系のモデル化と予測に関する 基礎的研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

椎葉, 充晴

CITATION:

椎葉, 充晴. 流出系のモデル化と予測に関する基礎的研究. 京都大学,
1983, 工学博士

ISSUE DATE:

1983-09-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r5080>

RIGHT:

新 制
工
579
京大 附 図

流出系のモデル化と予測に 関する基礎的研究

1983 年 4 月

椎 葉 充 晴

流出系のモデル化と予測に
関する基礎的研究

1983年4月

椎 葉 充 晴

目 次

第1章 緒 論	1
第2章 水文流出系における Kinematic Wave 理論	5
第1節 概 説	5
第2節 水文流出系における Kinematic wave 理論	5
2.1 開水路流れの基礎方程式と Kinematic wave 近似	5
2.2 地表面流に対する Kinematic wave 理論	9
2.3 指数法則 Kinematic wave モデルの一般化	13
第3節 特性曲線法	14
3.1 概 説	14
3.2 一様な流量・流積関係式，一様な横流入の場合の解析解	16
第4節 差分スキーム	18
第5節 要 約	20
参考文献	20
第3章 山腹斜面系のモデル化	23
第1節 概 説	23
第2節 中間流・地表面流の統合	24
2.1 石原・高棹の中間流・地表面流理論	24
2.2 中間流・地表面流の統合	26
第3節 地形形状効果の導入	31
3.1 地形形状が出水形態に及ぼす効果	31
3.2 地形パターン関数を導入した Kinematic wave モデル	32
3.3 円錐面上の Kinematic wave モデルと中間流・地表面流	33
第4節 裸地域の表面流と中間流出	39
4.1 裸地域の表面流と出水形態	39
4.2 裸地域の流れと中間流出	41

第5節 要 約	45
参考文献	46
第4章 河道網系のモデル化	49
第1節 概 説	49
第2節 河道網上の河道流の追跡構造	50
2.1 河道網構造	51
2.2 河道流の追跡構造	52
2.2.1 河道区分内の河道流の追跡	52
2.2.2 計算順序と流出系列の記憶の様式	53
2.2.3 河道網上の河道流の追跡構造	54
2.3 最適追跡方策とその系統的決定法	55
2.3.1 最適追跡方策	55
2.3.2 最適追跡方策の系統的決定法	59
2.4 流域単位概念の導入	61
2.5 実流域への適用例	62
2.5.1 流域単位のシステムモデル	62
2.5.2 河道流の追跡構造	63
2.5.3 計算例	64
第3節 河道網系の統合的表現	67
3.1 放射状河道網系の統合的表現	68
3.2 線形河道網系の統合的表現	69
3.3 一般の河道網系の統合的表現	70
第4節 要 約	74
参考文献	75
第5章 降雨・場・定数・流れのモデルの集中化	77
第1節 概 説	77
第2節 降雨の空間的分布が出水に及ぼす影響	78
2.1 基礎仮定	78

2.2	降雨の空間的分布の影響の分析	79
2.3	結 論	88
第3節	Kinematic wave 法における場および定数の集中化	88
3.1	概 説	88
3.2	等価粗度法の概略とその問題点	89
3.2.1	等価粗度法の概略	89
3.2.2	等価粗度法の問題点	91
3.3	流域場モデルの構成とその集中化	91
3.3.1	統一的流域分割基準	91
3.3.2	流域場モデルの構成	92
3.3.3	流域場モデルの集中化	92
3.3.4	場の定数の集中化	94
3.4	流れの定数の集中化	95
3.4.1	流れの定数の集中化の方針	95
3.4.2	河道の流れの定数の集中化	95
3.4.3	斜面の流れの定数の集中化	97
3.5	実流域での数値実験による検討	97
3.5.1	モデル流域の概要	97
3.5.2	場の集中化にともなう等価粗度の変化	98
3.5.3	場および定数の集中化方式の検討	99
3.5.4	斜面粗度係数の推定	100
第4節	河道網構造による集中化	100
4.1	河道網構造による流域単位の分類	100
4.2	河道網構造による集中化	103
第5節	単一要素 Kinematic wave モデルの集中化	106
5.1	概 要	106
5.2	指数法則単一要素 Kinematic wave モデルとその無次元化	106
5.3	多段貯水池モデルによる集中化と集中化誤差の構造	107
第6節	要 約	110
Appendix A	斜面 Kinematic 定数 α_0 と斜面長の等価性	111

B	定常線形化による河道効果・斜面効果の表現	112
C	河道網構造の識別指標	117
参考文献	125
第6章	状態空間法による流出予測理論	127
第1節	概説	127
第2節	流出システムのフィルタリングと予測の理論	128
2.1	確率過程的状态空間モデルの構成	128
2.2	降雨・流量観測, 降雨予測と流出予測の手順	130
2.3	降雨予測情報の入手と流出予測	132
2.4	観測値の入手とフィルタリング	134
2.5	モデルの検証と修正	135
第3節	実流域における流出予測シミュレーション	136
3.1	概説	136
3.2	確率的外乱項の導入	137
3.3	降雨予測シミュレーション	139
3.4	実流域への適用	140
3.4.1	対象流域の概要と水文資料	140
3.4.2	モデルパラメタの同定と予測	140
第4節	要約	151
Appendix A	統計的線形化の方法	151
B	Pade 近似による差分公式	153
C	KWRモデルの概要	154
参考文献	158
第7章	確率過程的 Kinematic wave モデルと流出予測	159
第1節	概説	159
第2節	確率過程的 Kinematic wave モデル	159
第3節	水深・流出量の予測	160
3.1	確定降雨の場合	161

3.2 不確定降雨の場合	163
第4節 水深のフィルタリング	164
第5節 要 約	165
参考文献	166
第8章 結 論	167
謝 辞	170

第1章 緒 論

洪水流出系を的確にモデル化し、洪水流量の予測手法を確立するという本研究の課題は必ずしも新しいものではない。

しかしながら、1960年代以降、特にここ10年の電算機を中心とする計算・情報処理技術の急速な発展、雨量・水位テレメータ、雨量レーダ等の即時的観測体制の充実は、この研究課題の新しい展開を可能にしている。

第一に、計算・情報処理技術の進展は、簡便さという流出モデルの評価尺度の比重を低下させ、流出機構の科学的分析に基づく普遍性という評価尺度の比重を増大させている。従来は、ともすれば、現実の水工問題に対処する必要上、現場で手計算でできる範囲の簡単な流出解析法を得ることに力が注がれてきた。一般に、流出過程に内在する雨水の流れの諸機構とその相互関係を基礎とする流出モデルは、その基礎式は簡潔でも手計算で解くのはほとんど不可能であって、少なくとも現場では、流域への降雨から流出量への変換をブラックボックスとしてその応答関係だけを問題にする流出モデルや、簡単な概念的変換機構をもつ流出モデルが多く用いられてきた。しかし、最近の計算・情報処理技術の発展によって、手計算では解けない微分方程式でも極めて短時間のうちに数値的に解け、その結果も図や表の見やすい形で表示できるようになっているので、手計算のイメージから流出計算の簡便さを問題にする必要はなくなってきている。このため、雨水流の分析に基づく流出解析法は、流出現象そのものを解明する手法としてだけでなく、現実の水工問題に現場で適用し得る実用的な方法と考えることができるようになってきている。このことは、さらにまた、雨水流法による流出解析法のより一層の展開を可能にしている。

第二に、即時的な観測体制の充実によって、現に進行しつつある洪水流出現象に関する情報が入手されるようになったので、それを利用して流出計算の不確実性を減少させ、流量予測をより確実なものにすることができるようになってきている。すなわち、時々刻々得られる観測情報から、流域の状態の推定をより確実なものにしていくことができるようになってきているのである。

上記の二つの事実は、洪水流出系をモデル化し、流出予測手法を確立するための主体的条件の整備・向上を意味する。一方、近年の急激な都市化を中心とする流域場条件の変化

とそれに伴う水災害の激化は、これらの課題の解決ないし発展を現実に必要なにしてきている。流域場条件の変化による流出形態の変化を予測するには、雨水流動場の条件を考慮した分析的な雨水流法によるモデル化を必要とすることは言うまでもない。また、治水施設の整備の速度を上回る流域場条件の変化と人口・資産の集中に対処するために、実時間でより精度の高い流出予測情報を提供して、現有施設の効果的な管理・運用・避難・水防活動の展開を図っていかねばならない。

本研究は、こうした観点から、雨水流法による従来の流出解析法のより一層の展開と実時間の流出予測手法の開発を図るものであって、その内容を簡単に述べれば、以下のようである。

第2章では、第3章以降の理論展開の基礎である Kinematic wave 理論を要約して提示する。従来、Kinematic wave 流れといえ、指数法則の流量～流積関係式を用いることが多く、その解法もこの指数法則の流量～流積関係式を前提として与えられていることが多いので、より一般的な場合の解法をこの章で提示している。

第3章では、山腹斜面表層付近の流出過程を Kinematic wave 法を基礎としてモデル化する。ここでは、中間流と地表面流を統合的に表わす流量～流積関係式を考えることによって、地表面流発生場の変動を自動的に組込んだ表現および流れの追跡法を提示する。また、山腹斜面の地形形状の効果をも組込んだ解析手法を示す。

第4章では、河道網系での変換過程をモデル化する。ここでは、河道網構造を分析して、河道区分の流れを逐一追跡していく構造を決定する手法を示す。また、これと比較しながら、流れの伝播過程の非線形性を考慮した河道網系の統合的表現を検討する。

第5章では、降雨・場・定数・流れのモデルの集中化を論じる。ここでは、空間的に分布する降雨をある面積スケールで平均化すること、場のモデルを簡略化したり、それに伴って雨水流モデルの定数を平均化することも広い意味で集中化に含めて議論する。

第6章と第7章は、流出予測問題を扱う。第6章では、集中型の流出モデルを想定して、観測誤差やモデル誤差に対応すると考える確率的外乱項を導入した確率過程の流出モデルとし、これを用いて、洪水流量の予測値だけではなく、予測精度をも前もって提示することのできる逐次の流出予測方式を示す。これまでに提案されている流出モデルの大半は集中型のモデルであるが、代表的な物理的モデルとされている Kinematic wave モデルは分布型のモデルであって、第6章で展開する理論を直接適用することはできないので、第7章で、特別に、確率的外乱項を導入した Kinematic wave モデルをとりあげて、

これを用いた予測理論を展開する。

第 8 章は研究の結論である。

第2章 水文流出系における Kinematic wave 理論

第1節 概 説

流域への降雨が対象地点の河川流量に変換される過程の内実は、流域場内の雨水の流動にある。この観点に立って、雨水流動法則に基づいて構成された流出モデルの1つが Kinematic wave モデルである。このモデルは、本研究の理論的背景となっている。

本章では、開水路流れの運動方程式を近似することによって、Kinematic wave モデルが得られることを説明する。この方法を山腹斜面の表面流に適用することによって、石原・高棹（1959）の表面流理論が展開され、水理学的基礎をもつ近代的な水文学の形成が開始された。この理論では、流量と流積あるいは水深の間に指数法則の成立を仮定する。しかし、後に高棹ら自身が示したように（高棹・岸本〔1961〕、石原・高棹〔1962〕、石原藤次郎・石原安雄・高棹・頼〔1962〕）、山腹斜面の流れでは、透水性の高い表土層中を流れる中間流が地表に達して形成される表面流も存在する。この場合、中間流と表面流を相互に連動する流れとして一体的に考えるのが便利である。すなわち、水深の変化に応じて流れの形態が変化することを反映するように流量と流積の関係式を修正すると便利である。それで、本章では、指数法則に限らず、より一般的な流量と流積の関係式にも適用できる Kinematic wave モデルの解法をも提示する。

第2節 水文流出系における Kinematic wave 理論

2.1 開水路流れの基礎方程式と Kinematic wave 近似

質量と運動量の保存則を適用することによって、1次元非定常の開水路の漸変流の基礎方程式が得られる。

$$\text{連続方程式} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L \quad (1)$$

$$\text{連続方程式} \quad \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial h}{\partial x} = \sin\theta - \frac{\tau_b}{\rho g R} - \frac{u q_L}{g A} \quad (2)$$

ただし、 A は流積（通水断面積）、 Q は流量、 q_L は流れの方向の単位幅あたりの横流入強度、 u は平均流速、 h は水深、 θ は水路床の勾配、 g は重力加速度、 τ_b は境界面摩擦応力、 ρ は水の密度、 R は水理水深、 t 、 x はそれぞれ時刻と位置を表わす。Saint-Venant の式と呼ばれるこの式の誘導についてはここでは述べない（たとえば、Chow [1959]を参照）。

(2)式は右辺に摩擦抵抗の項を含んでいる。この摩擦応力 τ_b に関係する係数 c_f を

$$\tau_b = c_f u^2 \quad (3)$$

で定義しよう。境界面粗度や流れの状態によって c_f は変化するが、第1次近似として、 c_f を一定にするとChezyの抵抗則が得られる。Chezyの抵抗係数を C とすると、 C と c_f の間には

$$C = \sqrt{\frac{\rho g}{c_f}} \quad (4)$$

なる関係がある。流れの状態による c_f の変化をより正確にとらえるには、(3)式をより一般に

$$\tau_b = \alpha_f u^{m_f} \quad (5)$$

の形で考えた方がよい。特に、広矩形の開水路の定常かつ等流の流れにおいては、流れが層流であれば、動粘性形数を ν として、

$$\alpha_f = \frac{2\rho\nu}{h}, \quad m_f = 1 \quad (6)$$

であり、乱流であれば、Manningの抵抗則を用いて

$$\alpha_f = n^2 h^{-4/3}, \quad m_f = 2 \quad (7)$$

である。ただし、 n はManningの粗度係数である。 α_f は水深 h の関数になっている。一般の場合にも、水深 h を水理水深 R にかえて、(5)式の形の抵抗則

$$\tau_b = \alpha_f(R) u^{m_f} = \alpha_f(R) Q^{m_f} / A^{m_f} \quad (8)$$

の成立を仮定する。 $\alpha_f(R)$ は水理水深 R の関数である。(8)式を(2)式に代入し、 Q について解くと

$$Q = f(A) \left\{ 1 - \frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u q_L}{g A} \right) \right\}^{1/m_f} \quad (9)$$

が得られる。ただし、簡単のため右辺の $\{\cdot\}$ は正值をとると仮定する。右辺に表われる関数 $f(A)$ は、

$$f(A) = A \left(\frac{\rho g R \sin\theta}{\alpha_f(R)} \right)^{1/m_f} \quad (10)$$

で与えられる。

特に、(7)式で水深 h を水理水深 R でおきかえた Manning の抵抗則を用いれば、

$$f(A) = \frac{1}{n} A R^{2/3} \sin\theta^{1/2} \quad (11)$$

を得る。水理水深 R は、河道断面形状によって異なるが、通常は、流積 A との間に、 K_1 、 z を定数として、指数法則

$$R = K_1 A^z \quad (12)$$

が成立つので、

$$\alpha = K_1^{2/3} \sin\theta^{1/2} / n, \quad m = 1 + 2z/3 \quad (13)$$

を定数として、(11)式は

$$f(A) = \alpha A^m \quad (14)$$

の形になる。水理水深 R が流積 A の指数関数であれば、抵抗則として Chezy 則を用いても $f(A)$ が A の指数関数となるのは同様である。

現実に取り扱う問題では、(9)式右辺の $\{\cdot\}$ の中の横流入 q_L に関係する項は他の項に比べてきわめて小さい (Eagleson [1970])。また、実際の洪水では、波形勾配、すなわち、洪水波高とそれに至る距離との比は河床勾配に比してきわめて小さいことが多い。このような場合には、流速の時間的・場所的变化あるいは水面勾配は河床勾配ならびに摩擦勾配に比べて小さくなる。これは、(9)式 $\{\cdot\}$ の第2項が無視できることを意味し、(9)式は

$$Q = f(A) \quad (15)$$

と近似できることになる。結局、波形勾配の小さい洪水では、流量 Q は流積 A の関数となる。前述のように、通常この関数は指数関数であって、流量 Q と流積 A の間に指数法則

$$Q = \alpha A^m \quad (16)$$

が成立つことになる。

より一般に、流量 Q が通水断面積 A 、位置 x 、時刻 t の既知関数 F を用いて、

$$Q = F(A, x, t) \quad (17)$$

と表わされるような1次元流れのモデルをKinematic waveモデルとよぶことにし、特に、(16)式のように流量 Q と流積 A の間に指数法則を考えるモデルを指数法則Kinematic waveモデルとよぶ（これらの呼び方は必ずしも確立されたものではなく、指数法則Kinematic waveモデルを単にKinematic waveモデルと呼ぶこともあり、また、流量 Q が流積 A と位置 x の関数である1次元流れのモデルをKinematic waveモデルと呼ぶこともある（Lighthill・Whitham〔1955〕）。(17)式を1次元流れの連続方程式(1)に代入すると、流積 A を従属変数、 x と t を独立変数とする1階準線形偏微分方程式が得られ、その解を(17)式に代入して流量 Q が得られる。Kinematic waveモデルを開水路流れに最初に適用したのは岩垣・末石〔1954〕である。岩垣・末石は、(9)式右辺の $\{\cdot\}$ の中で横流入に関係する項のみを残し他を無視したKinematic waveモデルを用いて、空間的に一様で時間的には矩形の横流入による開水路流れを解析し、実験値をよく説明できることを示した。

前述したように、現実の洪水の多くは、(15)式または(16)式のようなKinematic waveモデルで説明できるが、波形勾配が大きくなるとこの近似は必ずしも妥当ではない。Hayami〔1951〕は、(9)式右辺の $\{\cdot\}$ の中で水面勾配の項が比較的大きいとしてこれを残したモデルを考えた。このモデルは、結局通水断面積 A に関する放物型偏微分方程式になり、本論文でいうKinematic waveモデルではない。林〔1966〕は、指数法則Kinematic waveモデルによる解を第1近似とし、この第1近似解を(9)式右辺の $\{\cdot\}$ 中の各項に代入して得られる関係を(17)式として第2近似モデルを構成した。この方法は逐次的に用いることができる。(15)式または(16)式を用いるKinematic waveモデルでは洪水ピークの流積あるいは流量が流下に伴って減衰することはないが、林の方法ではこれらの減衰を説明することができる。

いずれにせよ、河道内の洪水流は各種の Kinematic wave モデルでは説明される。しかし、水文流出系の構成要素として河道を考える場合は、山腹斜面からの側方流入量の影響や、河道網による集水過程の比重が大きいので、運動方程式は指数法則 Kinematic wave 近似を考えておけば十分であろう。

2.2 地表面流に対する Kinematic wave 理論

末石 [1955] は、河道流だけでなく、山腹斜面流に対しても指数法則 Kinematic wave モデルが適用できるとして、矩形パルス列で表わされる横流入に対する対数図式法を用いて大戸川の流出を計算した。この研究は、Kinematic wave モデルを降雨流出問題に適用する端緒となったが、計算方法の提示にとどまり、水文流出系の構造を明らかにするには至らなかった。石原・高棹 [1959] は、時間的に変化する横流入（時間の任意関数）のある指数法則 Kinematic wave モデルの解の構造を解析的に表現し、これを用いて、表面流による雨水流出の法則性を明らかにした。この研究によって、水理学的基礎を持つ近代的水文学が開始された。本項では、この石原・高棹の理論に沿って、表面流に対する Kinematic wave 理論を要約する。

なお、議論を簡明にするために、本項では、不浸透面上の表面流、あるいは水みちや裸地等で浸透能を上回って雨水が補給された結果生じる表面流を考えることにする。この型の表面流は Horton 型表面流という。表面流が生じる機構としては、この他に、表土層の透水性は大きいとその下方に難浸透面があるために、表土層に雨水が滞留し飽和した結果、表面流が生じるという機構がある。この場合は、表土層内の自由水の側方流れ（中間流）が地表に達したときに表面流が形成され、中間流との相互干渉過程のモデル化が必要である。この型の表面流を飽和表面流とよぶことにする。飽和表面流については、次項および第 3 章でふれることにする。

前項で述べた開水路流れの基礎方程式において、広矩形の水路で単位幅の流れを考えると、傾斜した平面上の薄層流に対する基礎方程式が得られる。

$$\text{連続方程式} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r_e \quad (18)$$

$$\text{運動方程式} \quad q = \alpha h^m \left\{ 1 - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u r_e}{g h} \right) \right\}^{1/m_f} \quad (19)$$

ただし、 q は斜面単位幅あたりの流量、 r_e は斜面単位面積あたりの雨水供給強度で、降雨強度を r 、浸透強度を i とかくと

$$r_e = r - i \quad (20)$$

である。他の変数の意味は前項と同様である。

α 、 m_f は定数であって、Manningの抵抗則を用いると、粗度係数を n として、

$$\alpha = \sin\theta^{1/2}/n, \quad m = 5/3, \quad m_f = 2 \quad (21)$$

で与えられる。

山腹斜面は斉一な平面ではないが、平均的にみた流出の構造を考える場合には上記の平面上の薄層流モデルを考えてよい（山腹斜面形状の効果については第3章でふれる）。また、高棹・岸本〔1961〕の人工降雨発生装置を用い、かつ表面状態を種々変えた実験結果によると、いずれの場合にも、流れは等流状態と考えてよく、また、表面状態によって粗度係数は大きく変化するもののManningの抵抗則が成立つ。Palmer〔1946〕の芝地での実験結果ともあわせて、山腹表面の地表面流においては、水深や流速が小さくても流れは乱流かつ等流状態であって、Manningの抵抗則が適用できると考えてよい。すなわち、 α 、 m を(21)式によって定まる定数として、(19)式を

$$q = \alpha h^m \quad (22)$$

と近似できると考えてよい。

Woolhiser・Liggett〔1967〕は、

$$R_0 = \frac{L \sin\theta}{h_0 F_0} > 10 \quad (23)$$

が成立つとき、(18)、(19)式で記述される数理モデルが、(18)、(22)式によるKinematic waveモデルで十分よく近似できることを示した。ここに、 L は斜面長であり、 h_0 、 F_0 は、斜面下流端の流量 r_e の最大値と L との積で与えられ、かつそこでの流れが定常等流としたときの水深、Froude 数である。

さて、以下、記述を容易にするために、斜面長 L による変数変換

$$x = Lx', \quad q = Lq', \quad \alpha = L\alpha' \quad (24)$$

を用いる。これらを，(18)式，(22)式に代入した後，肩符'をとると，(18)式，(22)式と全く同一の式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r_e \quad (25)$$

$$q = \alpha h^m \quad (26)$$

が得られる。以後，本項では変数変換(24)を用いることとし，かつ肩符'を省略する。

$x = 1$ での q の値は流出高を与えることになる。

(25)式，(26)式から，特性微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dq}{dh} = \alpha m h^{m-1} \quad (27)$$

$$\frac{dh}{dt} = r_e(t) \quad (28)$$

が得られる。(27)式，(28)式の解曲線を特性曲線，その (x, t) 面への投影を特性基礎曲線とよぶ。斜面上流端で水深および流量は0としてよいから，時刻 τ に上流端を出発した特性基礎曲線の時刻 t' での位置を x ，そこでの流量を q とかくと

$$x = \alpha m \int_{\tau}^{t'} \left[\int_{\tau}^z r_e(s) ds \right]^{m-1} dz \quad (29)$$

$$q = \alpha \left[\int_{\tau}^{t'} r_e(s) ds \right]^m \quad (30)$$

が得られる。この特性基礎曲線が斜面下流端，すなわち， $x = 1$ に到達する時刻を t としよう。伝播時間 $t - \tau$ 内の r_e をその平均強度

$$r_{tm} = \int_{\tau}^t r_e(s) ds / (t - \tau) \quad (31)$$

で近似することによって，斜面上流端を出発した特性基礎曲線が斜面下流端に到達するまでの伝播時間は，(29)式から

$$t - \tau = \alpha^{-1/m} r_{tm}^{(1-m)/m} \quad (32)$$

として求められる。この関係は，伝播時間中，常に雨水供給がある場合に適用される式であって，伝播時間中に雨水供給が終った場合は，雨水供給の停止時刻を t_d として，時刻

τ から時刻 t_d までと, t_d から時刻 t までとに分けて上記の方法を適用するとよい。

特別に, 矩形の雨水供給

$$\begin{aligned} r_e(t) &= r_0, & 0 < t < t_1 \\ &= 0, & t > t_1 \end{aligned} \quad (33)$$

がある場合に上記の方法を適用しよう。この場合, (32)式に対応して得られる時間

$$t_s = \alpha^{-1/m} r_0^{-(m-1)/m} \quad (34)$$

と雨水供給の継続時間 t_1 との大小に応じて 2 つの場合に分けられる。

case 1 ($t_1 \geq t_s$)

$$\left. \begin{aligned} q &= \alpha (r_0 t)^m, & 0 < t < t_s \\ q &= r_0, & t_s < t < t_1 \\ (1 - q/r_0)/q^{(m-1)/m} &= m\alpha^{1/m} (t - t_1), & t > t_1 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

case 2 ($t_1 < t_s$)

$$\left. \begin{aligned} q &= \alpha (r_0 t)^m, & 0 < t < t_1 \\ q &= \alpha (r_0 t_1)^m, & t_1 < t < t_z \\ (1 - q/r_0)/q^{(m-1)/m} &= m\alpha^{1/m} (t - t_1), & t > t_z \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ただし,

$$t_z = t_1 + (1 - \alpha r_0^{m-1} t_1^m) / (\alpha m (r_0 t_1)^{m-1}) \quad (37)$$

は, $t = 0$ に $x = 0$ を出発した特性曲線が $x = 1$ に到達する時刻である。

さらに, 矩形入力(33)式において,

$$r_0 t_1 = k \quad (38)$$

を一定に保ち, $t_1 \rightarrow 0$ にしたときの流出を考えよう (Maddaus・Eagleson [1969])。この極限の入力を強度 k のインパルス入力とよぶ。(36)式, (37)式で $t_1 \rightarrow 0$ とすることにより, 強度 k のインパルス入力による流出は,

$$\left. \begin{aligned} q &= \alpha k^m & 0 < t < t_k \\ q &= \alpha (\alpha m t)^{-m/(m-1)} & t > t_k \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

で与えられる。ただし、

$$t_k = 1/(\alpha m k^{m-1}) \quad (40)$$

である。

また、(32)式を用いると、最大流量が発生する条件が次のように求められる。

$$\frac{d}{dt} [t - \tau]_{t=t_p} = 0 \quad (41)$$

$$r(t_p) = r(\tau_p) \quad (42)$$

$$t_p - \tau_p = \alpha^{1/m} q_p^{-(m-1)/m} \quad (43)$$

ただし、 q_p は最大流出高、 t_p は最大流量の発生時刻、 τ_p は時刻 t_p に斜面下流端に到達した特性基礎曲線が斜面上流端を出発した時刻である。

以上の記述では、山腹斜面の表面流に対する用語を用いたが、ここで提示した諸式は指数法則 Kinematic wave モデルに対して一般に成立つものである。なお、流量～流積関係式は、流量について解いた形式を考えたが、流積について解いた形式で記述されることもある。もちろん、意味するところは全く同一である。

2.3 指数法則 Kinematic wave モデルの一般化

前項では、表面流に対する運動方程式の Kinematic wave 近似の結果、指数法則の流量～流積関係式が得られた。この指数法則は、Darcy 則が成立し、輸送項が卓越する中間流に対しても適用できる。したがって、中間流と表面流とが別々に存在するとき、すなわち、中間流が地表面に達することがなく、また、表面流が Horton type の表面流であるときには、指数法則 Kinematic wave モデルを個別に適用して山腹斜面の雨水流出を分析できることになる。しかしながら、高棹・岸本〔1961〕、石原・高棹〔1962〕、石原藤次郎・石原安雄・高棹・頼〔1962〕が示したように、これらの著者が A 層とよぶ透

水性の高い表土層での側方流れ（中間流）がA層厚を超えて地表面流（飽和表面流）が発生するという中間流と地表面流の相互干渉過程は，流出過程に重要な影響を及ぼすことが知られている。したがって，水深の変化に応じて流れの形態が変化することを反映するように，流量と流積の関係式を修正する必要がある。そこで，流量と流積との関係式をより一般的に

$$q = f(h) \quad (44)$$

と表わしておくことにしよう。

ある場合には，Brakensiek[1967]が扱ったように，さらに一般的に流量と流積との関係式が位置 x とともに変化することを考えた方がよいこともある。これが，Lighthill・Whithamが定式化した関係

$$q = f(x, h) \quad (45)$$

である。

続く節で，(44)，(45)式を用いた場合のKinematic waveモデルの数値解法を述べる。

第3節 特性曲線法

3.1 概 論

Kinematic wave 流れの基礎式は

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad (1)$$

$$q = f(x, h) \quad (2)$$

で与えられる。ここに h は流積， r は横流入強度， t ， x は時刻と位置， f は q を x と h で表わす関数である。(2)式を(1)式に代入すると単独の偏微分方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + f_h \frac{\partial h}{\partial x} = r - f_x \quad (3)$$

を得る。この偏微分方程式の特性微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = f_h \quad (4)$$

$$\frac{dh}{dt} = r - f_x \quad (5)$$

で与えられる。ただし、 f_h, f_x は関数 $f(x, h)$ の h または x に関する偏導関数である。連立常微分方程式(4), (5)の解曲線は特性曲線, その (x, t) 平面への投影は特性基礎曲線と呼ばれる。以下の議論では,

$$f_h \geq 0 \quad (6)$$

と仮定する。この場合, 攪乱は x の増加する方向に伝播する。

さて, 初期・境界条件が

$$h(x, 0) = H_I(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad (7)$$

$$h(0, t) = H_B(t) \quad , \quad t > 0 \quad (8)$$

で与えられるとし, 流れが(1), (2)式で記述されるとき $x = L$ での流積 h (または流量 q) を求める問題を考えよう。ただし, $H_I(x), H_B(t)$ はある与えられた関数である。

特性曲線の理論によれば, t 軸の正の部分および x 軸の $0 \leq x \leq L$ の部分から出発する特性基礎曲線族が互いに交差することなく, 図 3.1 に示す帯状の領域を覆うならば, 特性曲線は方程式(3)の解曲面上にある。次項で述べるように, 入力 r , 流量と流積との関係式 f , 初期・境界条件がある種の条件を満たすときには, 特性基礎曲線が交差しないことを証明することができる。そのような場合には, 特性微分方程式(4), (5)を解析的に解くか, または Runge-Kutta

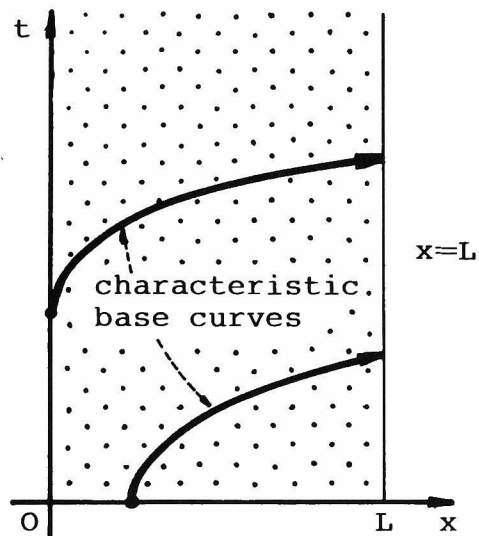


図 3.1 特性基礎曲線が覆うべき帯状領域 (点を打った部分)

法を用いて数値的に解くかして所要の値を求めることができる。しかし、特性基礎曲線が交差しないことが必ずしも保証されない場合には、特性曲線を追跡していく方法では、特性基礎曲線の交差が起こったときにそれ以上計算を進めることができなくなるので、第4節で述べる差分法による方が望ましい。

3.2 一様な流量・流積関係式，一様な横流入の場合の解析解

ここでは，流量・流積関係式，横流入は位置 x に依存しない場合を考える。すなわち，

$$q = f(h) \quad (9)$$

$$r = r(t) \quad (10)$$

とする。これらの仮定のもとでは，特性微分方程式(4)，(5)は

$$\frac{dx}{dt} = f'(h) \quad (11)$$

$$\frac{dh}{dt} = r(t) \quad (12)$$

となる。

さらに，ここでは，(7)式の $H_I(x)$ は x の非減少関数，(8)式の $H_B(t)$ は t の非増加関数とし，

$$\lim_{t \rightarrow 0} H_B(t) < H_I(0) \quad (13)$$

と仮定する。そうすると，明らかに下流側の特性曲線ほど伝播速度が大きくなるので特性基礎曲線が交わることはない。

Woolhiser [1955] は，流量と流積との関係(9)が指数法則で表わされるときに，Runge-Kutta 法で特性微分方程式(11)，(12)を数値的に解いている。ここでは，横流入強度が区分的に一定値をとるとき，すなわち

$$r(t) = r_i \quad , \quad t_{i-1} < t < t_i \quad (14)$$

である場合の特性微分方程式(11)，(12)の解を求める。横流入強度 $r(t)$ が一定値をとるとされ

る区間 $(t_i - t_{i-1})$ を十分小さくとれば、任意の $r(t)$ を十分近似することができる。末石〔1955〕は、このような横流入をうける指数法則の Kinematic wave 流れの特性微分方程式を対数図式法を用いて解いている。

さて、区間 $t_{i-1} < t < t_i$ に対して、微分方程式(12)は容易に積分でき

$$h(t) = h_* + (t - t_*) r_i \quad (15)$$

で、これを微分方程式(11)に代入して積分すると

$$\left. \begin{aligned} r_i \neq 0 \text{ のとき } & x(t) = x_* + \{f(h_* + (t - t_*) r_i) - f(h_*)\} / r_i \\ r_i = 0 \text{ のとき } & x(t) = x_* + f'(h_*) (t - t_*) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

を得る。ただし、(15)、(16)式中、 t_* 、 x_* 、 h_* はそれぞれ特性曲線が出発する時刻、位置、流積である。(16)式により計算される $x(t_i)$ が $x(t_i) \geq L$ となるときは、時刻 t_i 以前の時刻 t_E

$$\left. \begin{aligned} r_i = 0 \text{ のとき } & t_E = t_* + (L - x_*) / f'(h_*) \\ r_i \neq 0 \text{ のとき } & t_E = t_* + \{f^{-1}(q_E) - h_*\} / r_i \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

に特性基礎曲線が $x = L$ に到達する。ただし、 f^{-1} は f の逆関数、 q_E は、特性基礎曲線が $x = L$ に到達したときの流量で、

$$q_E = f(h_*) + (L_0 - x_*) r_i \quad (18)$$

である。その時の流積 h_E は

$$h_E = h_* + (t_E - t_*) r_i \quad (19)$$

で与えられる。

(15)～(19)式を用いて、 x 軸または t 軸を出発する特性基礎曲線が追跡され、それが下流端に到達する時刻、流量、流積が求められる。

以上の解法は、特性基礎曲線が交差しない場合にのみ有効である。斜面系に対しては、通常

$$\left. \begin{aligned} h(0, t) &= H_B(t) = 0 \\ h(x, 0) &= H_I(x) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

と仮定される。この場合は、特性基礎曲線は交差しない。しかし、時間的に増大する上流端流入量を持つ河道区分では、特性基礎曲線が交差するかも知れない。このような場合は、第4節で述べる差分解法によるのがよい。

第4節 差分スキーム

特性基礎曲線が交差しない場合は、特性微分方程式を解くことによってKinematic wave 流れを追跡することができるが、特性基礎曲線が交差する場合はいわゆるKinematic shock waveが発生して、特性曲線を追跡する方法では1価の解が得られない。以下で述べる差分解法は、このようなKinematic shock waveが発生する場合にも有効である。

本節では、次のKinematic wave 流れを考える。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(x, t) \quad (1)$$

$$q = f(x, h) \quad (2)$$

初期・境界条件は

$$h(x, 0) = H_I(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (3)$$

$$h(0, t) = H_B(t), \quad t > 0 \quad (4)$$

で与えられるものとする。

この流れに対する差分解法は種々考えられるが、以下では、2次のオーダーの精度を持つLax-Wendroff スキーム（たとえば、矢嶋・野木〔1977〕）に類似のスキームを与える。

まず、

$$x_j = j \Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad \Delta x = \frac{L}{n} \quad (5)$$

で与えられる $(n+1)$ 個の節点 x_1, x_2, \dots, x_n を設け、ある時刻 t_i において、 $h(x_i, t_i), q(x_j, t_i), j = 0, 1, \dots, n$ を既知とする。初期条件(3)と流量流積関係式(2)によって、 $t_i = 0$ のときは、これらの値は既知である。

さて、微小時間 Δt 後 $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ での流積 $h(x_j, t_{i+1})$ を求めることを考えよう。 $j = 0$ に対しては、境界条件(4)から

$$h(x_0, t_{i+1}) = H_B(t_{i+1}) \quad (6)$$

である。 $1 \leq j \leq n-1$ に対しては次のようにする。 $h(x_j, t_{i+1})$ を $t = t_i$ の回りに Taylor 展開して Δt の 2 次の項までとる

$$h(x_j, t_{i+1}) = h(x_j, t_i) + \Delta t \frac{\partial h}{\partial t}(x_j, t_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x_j, t_i) \quad (7)$$

連続式(1)を用いて右辺は、

$$h(x_j, t_i) + \Delta t \left\{ r(x_j, t_i) - \frac{\partial q}{\partial x}(x_j, t_i) \right\} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ f_h \left(r - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right\} \right]_{\substack{x=x_j \\ t=t_i}} \quad (8)$$

と書換えられ、時間微分項を含まない形となる。そこで空間微分をそれぞれ、空間差分

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x_j, t_i) \rightarrow \frac{q(x_{j+1/2}, t_i) - q(x_{j-1/2}, t_i)}{2\Delta x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ f_h \left(r - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right\}_{\substack{x=x_j \\ t=t_i}} \rightarrow \frac{1}{\Delta x} [G(x_{j+1/2}, t_i) - G(x_{j-1/2}, t_i)] \quad (10)$$

で置き換えると $h(x_j, t_{i+1})$ の計算式が得られる。ただし

$$G(x_{j \pm 1/2}, t_i) = f_h(x_{j \pm 1/2}, (h(x_j, t_i) + h(x_{j \pm 1}, t_i))/2) + [r(x_{j \pm 1/2}, t_i) - \{q(x_{j+1/2 \pm 1/2}, t_i) - q(x_{j-1/2 \pm 1/2}, t_i)\}]/\Delta x] \quad (11)$$

(複号同順)とする。 $j=n$ に対しては、後退差分近似を用いて

$$h(x_n, t_{i+1}) = h(x_n, t_i) + \Delta t \left\{ r(x_n, t_i) - \frac{q(x_n, t_i) - q(x_{n-1}, t_i)}{\Delta x} \right\} \quad (12)$$

とする。

以上の計算中の時間間隔 Δt は次の Courant の条件 (たとえば、矢嶋・野木〔1977〕)

$$\Delta x / \Delta t \geq f_h(x_j, t_i), \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (13)$$

を満たすようにとる。 $h(x_j, t_{i+1})$, $j = 0, 1, \dots, n$ が得られたら、流量流積関係式(2)から $q(x_j, t_{i+1})$, $j = 0, 1, \dots, n$ が得られる。以上の手順を繰り返せば、求

める解が得られる。

この解法に欠点がないわけではない。1つの難点は、Coulantの条件を満たすように時間間隔 Δt をとったとしても、数値的安定性は必ずしも保証されないという点である。Coulantの条件は、線形系について導かれたもので、非線形系の数値的安定性の十分条件ではないからである。しかしながら、この解法は、かなり一般的な流入条件、流量流積関係を取扱え、Kinematic shock waveが発生しても支障はないという利点を有している。

第5節 要 約

本章では、表面流の水理式を述べ、運動方程式を近似して、Kinematic wave流れの方程式系を導いた。このKinematic wave近似では、通常、指数法則の流量流積関係式が得られる。指数法則のKinematic wave流れについては詳細な研究がなされており、その主要な結果を要約しておいた。しかし、後の諸章で述べるように、指数法則に限らず、より一般的な流量流積関係式を考えることは非常に有用であるので、Kinematic wave流れの解法はこのような一般的な流量流積関係式にも適用できる形で提示した。

参 考 文 献

- 岩垣雄一・末石富太郎(1954)：横から一様な流入のある開水路の不定流について — 雨水の流出現象に関する水理学的研究(第1報)，土木学会誌，第39巻11号，pp. 575-583.
- 石原藤次郎・石原安雄・高棹琢馬・頼千元(1962)：由良川の出水特性に関する研究，京大防災研究所年報，第5号A，pp. 147-173.
- 石原藤次郎・高棹琢馬(1959)：単位図法とその適用に関する基礎的研究，土木学会論文集，第60号別刷.
- 石原藤次郎・高棹琢馬(1962)：中間流出現象とそれが流出過程におよぼす影響について 土木学会論文集，第79号，pp. 15-21.

- 末石富太郎(1955):特性曲線法による出水解析について — 雨水の流出現象に関する水 理学的
研究(第2報),土木学会論文集,第29号, pp. 74-87.
- 高棹琢馬・岸本卓男(1961):雨水流出の実験的研究,京大防災研究所年報,第4号,
pp. 132-154.
- 林 泰造(1966):河川の不定流について,水工学シリーズ,66-01,土木学会水理委員会.
- 矢嶋信男・野木達夫(1977):発展方程式の数値解析,岩波書店.
- Brakensiek, D. L. (1967): Kinematic Flood Routing, Trans. ASAE
Vol. 10, No. 3, Pp. 340-343.
- Chow, V. T. (1959): Open Channel Hydraulics, McGraw-Hill, New
York.
- Eagleson, P. S. (1970): Dynamic Hydrology, McGraw-Hill, New
York.
- Hayami, S. (1951): On the Propagation of Flood Waves, Bull.
DPRI, Kyoto Univ., No. 1.
- Lighthill, M. J. and Whitham, G. B. (1955): On Kinematic Waves,
I. Flood Movement in Long Rivers, Proc. Roy. Soc. London,
Vol. 229, A., pp. 281-316.
- Maddaus, W. O. and Eagleson, P. S. (1969): A Distributed Linear
Representation of Surface Runoff, M.I.T. Hydrodynamics Labo-
ratory, Rept. No. 115.
- Palmer, V. J. (1946): Retardance Coefficient for Low Flow in
Channels Lined with Vegetation, Trans. AGU.
- Woolhiser, D. A. and Liggett, J. A. (1967): Unsteady One-Di-
mensional Flow over a Plane—the Rising Hydrograph, Water
Resources Research, Vol. 3, No. 3, pp. 753-771.

第3章 山腹斜面系のモデル化

第1節 概 説

本章では、山腹斜面の表層付近の流出過程を、Kinematic wave法を基礎としてモデル化することを考える。

Kinematic wave式を山腹斜面の流出解析に初めて適用したのは末石〔1955〕である。末石は、斜面上の薄層表面流が、指数法則Kinematic wave式で記述されるとして、対数図式法を用いて大戸川の流出を解析した。同様の仮定を用いて、石原・高棹〔1959〕は、時間的に変化する横流入（時間の任意関数）のある指数法則Kinematic waveモデルの解の構造を解析的に表現し、これを用いて地表面流による雨水流出の基本的特性を明らかにした。こうして、指数法則Kinematic waveモデルは、山腹斜面の流れを解析する有力なモデルとなった。

しかしながら、山腹斜面表層付近の流れのすべてが指数法則Kinematic wave式でモデル化されるとはいえない。石原・高棹〔1962〕は、山腹表層に透水性の高い土壌層を考えてこれをA層と呼び、A層内の自由水の側方流れ（中間流）がA層を越えて地表に達したときに地表面流（すなわち、飽和表面流）が発生するという構造を想定した。こうした構造では、地表面流の発生は斜面の下部で生じ、その発生域が初期土湿条件・降雨入力条件によって1出水内でも時間的に変動するという現象が生じる。この現象は、指数法則Kinematic waveモデルでは説明し得ない構造的特質であり、石原藤次郎・石原安雄・高棹・頼〔1962〕によって実際の流出現象におけるその役割の重要性が実証された。

しかし、石原・高棹の中間流・地表面理論では、中間流と地表面流とは連動しているとはいっても、やはり別々の基礎式で表現され、まず、中間流の追跡によって地表面流発生域を求め、その地表面流発生域の流れを指数法則Kinematic wave式で追跡するという形式をとっている。このため流れの具体的な追跡計算は、単一の指数法則Kinematic wave式によるそれよりも複雑になる。これを回避する1つの方法は置換有効降雨（石原・高棹〔1964〕）を導入して単一の指数法則Kinematic wave式を適用する近似法である（正確に言えば、この方法では水みちに生じるHorton型表面流も考慮している）。

本章では、基礎式を個別に考えるのではなく、中間流・地表面流を一体的に表わす基礎式を用いる直接的な方法を提示する。すなわち、A層上の地表面流に対して、A層内流量流積関係式と連続的に接続する流量流積関係式を採用して、中間流・地表面流を統合的に表現・追跡する手法（高棹・椎葉・北村〔1976〕）を示す。

また、石原・高棹が対象としたのは、矩形平面でモデル化される一様な山腹斜面での表面流生起場の変動であって、収束する山腹斜面において表面流が発生しやすいというDunne・Black〔1970a, b〕の観測結果を説明するには、山腹斜面形状の効果をも考慮するように理論を拡張しなければならない。本章では、地形パターン関数を導入したKinematic waveモデル（高棹・椎葉〔1981a〕）を考えることによってこの問題を解決する。

第2節 中間流・地表面流の統合

2.1 石原・高棹の中間流・地表面流理論

林草地表層付近の土壌構造に関して、石原・高棹〔1962〕は次のように述べている。

… この林草地には、一般に団粒構造をした数cmないし数10cmの樹草の腐敗した表層があり、その間げき率および有効間げきがかなり大きいので、水は重力水となって流れやすい。この表層の下部には、上方からの溶脱物質や浸透水とともに沈降した土の微粒子が沈着して、ある程度緻密になっている漸移帯がある。上方からの浸透水はこの漸移帯に停滞し、その下層土壌の透水性の低さとあいまって、表層土壌には浸透水が保留され、やがて重力水となって山腹表面に沿っての側方浸透流が発生することになる。

こうした透水性の高い表層を石原・高棹はA層とよび、そこでの側方浸透流を中間流とよぶことにした。石原・高棹の中間流理論の特徴は、こうした中間流が直接流出の主要な源泉の1つであるとするだけでなく、この中間流が地表面流機構と連動して、地表面流の発生・消長を支配するとした点にある。すなわち、石原・高棹は、A層が有限の厚さをもっているとし、表層近傍の水理機構を図2.1のように考えたのである。同図で、Lは山腹

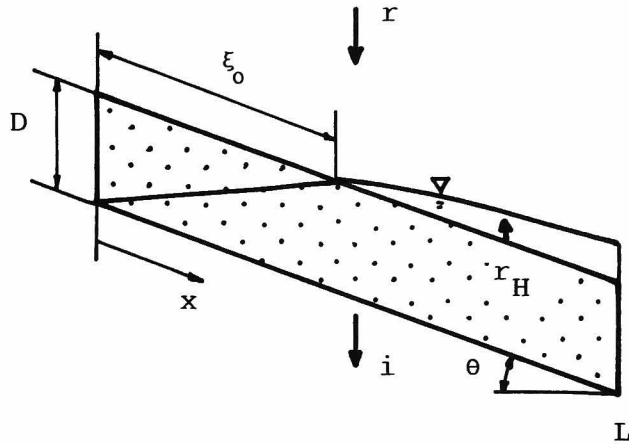


図 2.1 表層近傍の水理機構
(石原・高棹, 1962)

斜面長, D は A 層の厚さ, $\sin\theta$ は斜面勾配, r は降雨強度, r_H は A 層内から表面への雨水の浸出強度, i は A 層底の浸透能, ξ_0 は斜面上流端から表層飽和域までの距離である。

表層近傍の流れを図 2.1 のように考えると, 第 1 に, 表面流の発生場は中間流機構によって支配され, 時刻とともに変動する。第 2 に, 表面流への雨水補給の源泉として, 表面流に直接供給される降雨のほかに, A 層からの雨水浸出が考えられる。中間流と表面流とが並存するものとしてこれらの加算で直接流出を説明するのではなく, この 2 つの流れが相互に連動するものとして直接流出を説明するこの理論は, 山腹の small plot での流出現象の詳細な観測・散水実験を経て確立されつつある Variable source area concept (Kirkby [1979]) によって追認されている。

しかしながら, 石原・高棹の中間流・地表面流理論では, A 層上の地表面流に対して, 裸地上の地表面流同様に, 指数法則の Kinematic wave 式を適用し, 中間流が A 層を超えた地点からは, この指数法則 Kinematic wave 式を用いて流れを追跡することとしている。このため, 中間流水深が A 層表面に達する点, すなわち表面流発生域の上流端点の近くで水深が不連続になる (後出図 2.3 参照)。本研究では, A 層上の地表面流に対して, A 層内の流量流積関係式と連続的に接続する流量流積関係式を採用してこの現象を解消する。こうして得られる A 層上の地表面流の流量流積関係式と A 層内中間流の流量流

積関係式は、統合して、中間流・地表面流の統合した流量流積関係式とすることができるので、このことは同時に、中間流・地表面流を統合した表現および流れの追跡を可能にする。

2.2 中間流・地表面流の統合

A層をもつ林草地表面において、A層内中間流とA層上地表面流とを統合した流れを中間流⊕地表面流と表わす。

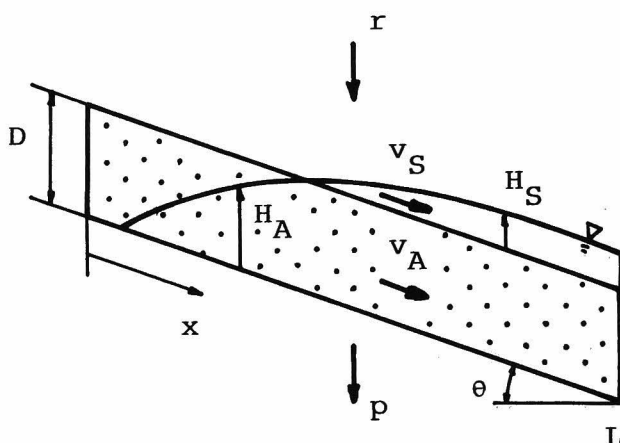


図 2.2 表層近傍の流れの説明図

図 2.2 は、この中間流⊕地表面流モデルの構造を説明するための表層付近の流れの模式図である。図中、 L は斜面長、 θ は斜面勾配、 D は A 層厚、 H_A は中間流水深、 H_S は表面流水深、 v_A は中間流平均流速、 v_S は地表面流の平均流速、 r は降雨強度、 p は A 層底面から下層への浸透強度である。林草地表面の透水性はきわめて大きく、数百 mm/hr に達するといわれるので（飯塚肇，1958），A 層が不飽和である場所では，表面に雨水は滞留せず，直ちに A 層に浸透するものとする。したがって， $H_A < D$ のところでは $H_S = 0$ であり， $H_S > 0$ であるところでは $H_A = D$ とする。すなわち，中間流水深が A 層厚 D に達する地点より下流側においてのみ，中間流が A 層厚全体に達して地表面流が発生する。

このように図式化される中間流⊕地表面流の流積 h を次のように定義しよう。

$$h = \gamma H_A + H_S \quad (1)$$

ただし、 γ は A 層内有効空げき率である。こうして定義される流積 h は、単位面積あたりの、中間流および地表面流の両形態にある雨水の貯留量であり、場所的・時間的に変動する。また、中間流⊕地表面流の流量 q を

$$q = \gamma H_A v_A + H_S v_S \quad (2)$$

と定義する（斜面単位幅あたりの実際の側方流量は $q \cos \theta$ で与えられる）。 q はもちろん、場所的・時間的に変動する。

A 層内中間流は、輸送項の卓越する G 型中間流（高棹 [1963]）とする。そうすると、A 層内平均流速は、A 層内の透水係数を k として、

$$s_A = k \sin \theta / \gamma \quad (= a \text{ とおく}) \quad (3)$$

で与えられる。したがって、 $H_A < D$ （このとき $H_S = 0$ ）のとき、すなわち、中間流⊕地表面流の流積 h が、みかけの A 層厚

$$d = \gamma D \quad (4)$$

より小さいときは、(2)、(3)式より q が求められる。

$$h < d \quad \text{のとき} \quad q = a h \quad (5)$$

一方、 $H_S > 0$ （このとき、 $H_A = D$ ）のとき、すなわち、 $h > d$ のときには、(2)式右辺の第 2 項も考慮しなければならない。表面流に対して、指数法則 Kinematic wave 式を適用すると、 α および $m > 1$ を定数として、

$$H_S v_S = \alpha H_S^m, \quad v_S = \alpha H_S^{m-1} \quad (6)$$

となるが、表面流水深 H_S が 0 に近づくにつれ、表面流平均流速 v_S が 0 に近づくことになる。この場合には、表面流発生域の上流端付近では表面流平均流速が、A 層内平均流速より小さくなるから、図 2.3 のような水面形状になる。しかし、これは、A 層表面の透水性がきわめて大きくて、A 層が不飽和（ $h < d$ 、または $H_A < D$ ）のところでは A 層表面に雨水は滞留しないと仮定に反することになる。また、流れの連続性を考えると、表

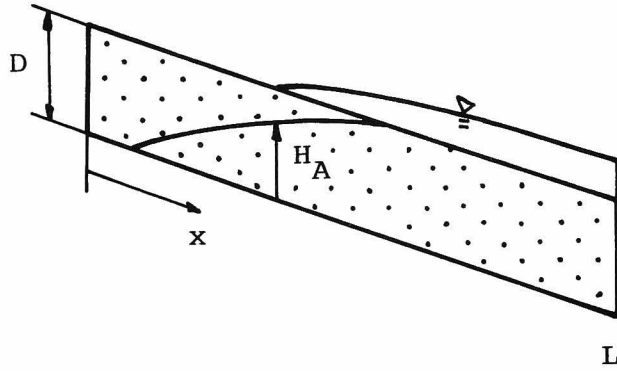


図 2.3 不連続な水面形

面流底面での局所的流速は，A層内流速と一致するはずであるから，表面流水深 H_S が0に近づくとき，表面流平均流速 v_S はA層内流速 $v_A = a$ に近づくとするのが妥当である。

よって，本研究では，表面流に対して(6)式を用いず， $H_S \rightarrow 0$ のとき $v_S \rightarrow v_A = a$ となる関係式として，

$$H_S v_S = \alpha H_S^m + a H_S, \quad v_S = \alpha H_S^{m-1} + a \quad (7)$$

を用いる。もちろん， $H_S \rightarrow 0$ のとき， $v_S \rightarrow v_A = a$ となるという条件だけから(7)式の関係が導かれるわけではないが， $v_A = a$ が十分小さいときに通常の指数法則Kinematic wave式に帰着するという点で，(7)式は指数法則Kinematic wave式の自然な拡張になっている。

(7)式を表面流に対して用いると， q と h の関係は，

$$h \geq d \quad \text{のとき} \quad q = \alpha (h-d)^m + a h \quad (8)$$

となる。

$h < d$ に対する q と h の関係式(5)と， $h \geq d$ のときの q と h の関係式(8)をまとめて，

$$q = f_{AS}(h) \quad (9)$$

と表わすことにしよう。これが統合された中間流⊕地表面流の流量流積関係式である。図

2.4に，この流量流積関係を図示しておく。

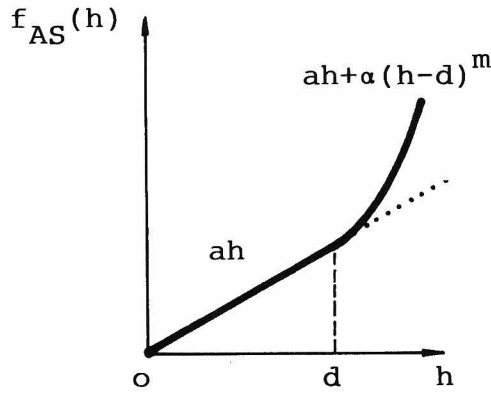


図 2.4 統合された中間流⊕地表面流の流量流積関係

一方、雨水の連続式は、(1)，(2)式による流積 h ，流量 q の定義と，図 2.2 に示した関係から，

$$\partial h / \partial t + \partial q / \partial x = r - p \quad (10)$$

と表わされる。(9)，(10)式が，中間流⊕地表面流の基礎方程式である。

この方程式系は，指数法則 Kinematic wave 式ではないが，やはり Kinematic wave 式であり，その解法はすでに 2 章で述べている。中間流と地表面流を統合したこの方程式系では，地表面流の発生域や A 層表面での雨水浸出強度を求める必要がなく，雨水流の形態の転移は，流量流積関係を区分的に定義することによって流れの追跡計算過程で自動的に考慮されるという利点を有している。

具体的な計算例は，斜面地形形状の効果をも考慮したより一般的な場合を扱う次節で示すことにし，本節では

$$r_e = r - p = \text{一定} \quad (11)$$

の場合に，斜面上流端を出発した特性曲線が斜面下流端に到達するのに要する時刻 t_c を求めておく。 t_c を決定する式は，表面流が発生するか否かで異なる。

(i) $ad/r_e > L$ のときは表面流は発生せず，

$$t_c = L/a \quad (12)$$

である。

(ii) $ad/r_e < L$ のときは，斜面上流端を出発した特性曲線が位置 $x_d = ad/r_e$ に到達する時刻 $t_d = d/r_e$ 以後，流れは表面流形態をとり， t_c は

$$L = \alpha r_e^{m-1} (t_c - t_d)^m + a t_c \quad (13)$$

を満たす。

図 2.5 に，(12)，(13)式で記述される，中間流⊕地表面流の r_e と t_c との関係を模式的に示す。 r_e が小さくて地表面流が発生しない場合には t_c は(12)式による一定値をとるが，

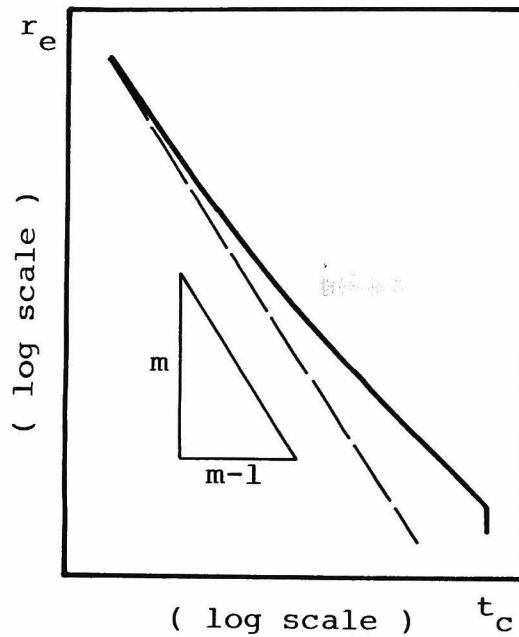


図 2.5 中間流⊕地表面流
の r_e と t_c の関係

r_e が大きくなって地表面流が発生するようになると， r_e の増大につれ t_c は減少し，その関係は r_e の増大につれ，地表面流だけからなる場合の r_e と t_c との関係（図中の破線）に漸近する。指数法則 Kinematic wave 式が成立する流れでは，両対数紙上に

プロットした r_e と t_c とは直線上に並び、その傾きから指数 m が決定できる（図中の破線）。この観点から、中間流⊕地表面流の両対数紙上の $r_e \sim t_c$ 曲線の接線勾配を $-m'/(m'-1)$ に等値して得られる見かけ上の指数 m' を求めてみると、地表面流が発生する場合には、 $m' > m$ となることが図から読みとれる。これは、 A 層厚が有限であるために生ずる流れ形態の転移という、言わば流れの場の構造的な非線形性を、局部的に流れの抵抗則の非線形性に置き換えてみると、みかけ上非線形性を表わす指数が増大することを示している。山腹斜面の流出過程に単純な指数法則 Kinematic wave 式を適用して、その流量流積関係式の指数を検討することによって、流れの形態が層流であるとか乱流であるとかを議論する場合には、こうした流れの場の構造的な非線形性の影響を十分考慮する必要があることが、これから理解できよう。

第3節 地形形状効果の導入

3.1 地形形状が出水形態に及ぼす効果

前節では、 A 層に被覆された平面上の中間流⊕地表面流モデルを考えた。斜面上流から雨水を集めて流下する中間流が、 A 層内だけでは雨水を流下させることができなくなると、 A 層表面に地表面流を発生させるという機構をこのモデルは持っている。

ところが、このモデルで考えられているように斜面が平面ではなく、図 3.1 (a) のように

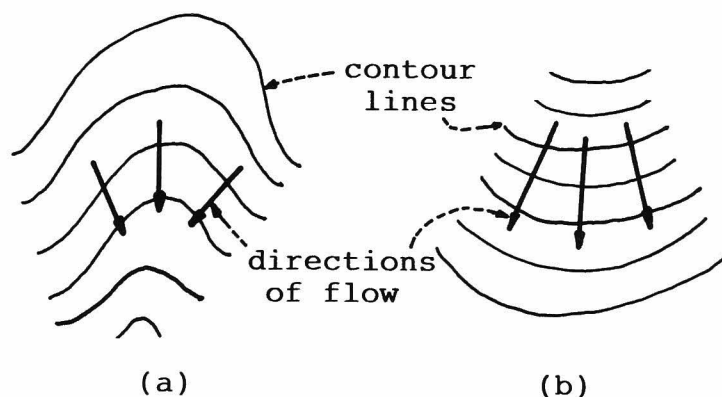


図 3.1 収束または発散する斜面

収束する曲面であれば、地形による集水効果のために地表面流が発生する傾向はさらに強くなるであろうし、逆に図 3.1 (b)のように発散する曲面であれば、地表面流の発生は抑制されるであろう。実際、Dunne・Black [1970b] は、試験流域での自然降雨および人工散水による流出を観測して、収束する斜面の下部で表面流が発生しやすい事実を示している。

そこで、本節では、こうした斜面形状の効果をも考慮しうるモデル化を考える。

3.2 地形パターン関数を導入した Kinematic wave モデル

一般に、一様な Kinematic wave モデルは、適当な変数変換のもとで、次の方程式系で記述される。

$$\partial s / \partial t + \partial w / \partial y = A r(t) \quad , \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (1)$$

$$w = f(s), \quad (2)$$

$$y = 0 \quad \text{で} \quad w = s = 0, \quad (3)$$

$$Q(t) = w(1, t). \quad (4)$$

ただし、 t は時刻、 y は無次元化された空間座標、 $r(t)$ 、 $Q(t)$ はそれぞれ、時刻 t での入力と出力、 $A > 0$ は定数、 $s(y, t)$ 、 $w(y, t)$ は位置 y 、時刻 t での“流積”と“流量”、関数 f は、 s と w の関係を表わす。 $f(0) = 0$ とする。

これに対して、地形パターン関数 $g(y) > 0$ を導入した Kinematic wave モデルとは、次の方程式で表現されるモデルを言うことにする（高棹・椎葉 [1981a]）。

$$\partial s / \partial t + \partial w / \partial y = g(y) r(t) \quad , \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

$$w = g(y) f(s/g(y)), \quad (6)$$

$$y = 0 \quad \text{で} \quad w = s = 0, \quad (7)$$

$$Q(t) = w(1, t). \quad (8)$$

このモデルで、 $g(y)$ が一定値 A をとるとし、 $A f(s/A)$ をあらためて $f(s)$ とおくと、(5)～(8)式は(1)～(4)式に一致する。言いかえると、一様な Kinematic wave モデルは、

地形パターン関数を導入した Kinematic wave モデルの特殊な場合である。

(5)～(8)式の物理的意義，地形パターン関数 $g(y)$ の意味は，このモデルを具体的に適用する際に明らかにする。

(5)～(8)式は，Cauchyの初期値問題を構成するが，特性曲線を追跡する方法で厳密解を求め得るのはごく限られた場合であり，また，場合によっては Kinematic shock wave が発生して，特性曲線を追跡する方法では解が求められなくなる。したがって，Kinematic shock wave が発生しても弱い解（たとえば，谷内・西原〔1977〕を参照）が求められる One-step の Lax-Wendroff スキームを用いるのがよい。この差分スキームについては，すでに第2章第4節で触れておいた。

3.3 円錐面上の Kinematic wave モデルと中間流・地表面流

本項では，収束または発散する円錐面上の Kinematic wave モデルが，地形パターン関数を用いたモデルの特別の場合であることを示す。また，流量と流積の関係式として，前節の(9)式を用いて，収束または発散する円錐面上の中間流⊕地表面流をモデル化し，その出水形態を分析する。

金丸〔1960〕は，図3.2のような収束または発散する円錐面上の表面流を考え，連続式を次のように与えている。

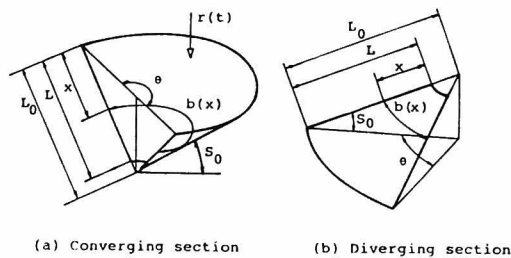


図 3.2 円錐面斜面モデル

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} \{ u h b(x) \} = r(t) \quad (9)$$

ただし、 h は鉛直方向に測った水深、 u は流下方向の平均流速、 $r(t)$ は(有効)降雨強度である。 $b(x)$ は、位置 x での流域幅であり、図3.2(a)のような収束する円錐面では、

$$b(x) = \theta \cos S_0 (L - x), \quad (10a)$$

図3.2(b)のような発散する円錐面では、

$$b(x) = \theta \cos S_0 (x + L_0 - L) \quad (10b)$$

である(θ , S_0 , L_0 , L については図3.2を参照)。

ここで、

$$q = uh \quad (11)$$

とおくと、斜面下流端の単位幅あたりの流出量を線積分して得られる流出量 $Q(t)$ は、

$$Q(t) = b(L) q(L, t) \cos S_0 \quad (12)$$

で与えられるから、変数変換

$$\left. \begin{aligned} y &= x/L, \quad g(y) = b(Ly) L \cos S_0, \\ w(x, t) &= b(Ly) q(Ly, t) \cos S_0, \\ s(x, t) &= b(Ly) L h(Ly, t) \cos S_0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

を用いると、(9)式、(12)式は、

$$\partial s / \partial t + \partial w / \partial y = g(y) r(t), \quad (14)$$

$$Q(t) = w(1, t) \quad (15)$$

と変形される。

流量流積関係式として、金丸[1960]はManningの平均流速公式を用い、Woolhiser[1969]は指数関数を用いたが、ここでは、より一般に

$$q = f(h) \quad (16)$$

と表わしておく。変数変換(13)を用いると、これは、 w と s の関係

$$w = g(y) f^* (s/g(y)) \quad (17)$$

を与える。ただし、関数 f^* は、元の関数 f を用いて、

$$f^* (h) = f (h)/L \quad (18)$$

と定義するものとする。

結局、円錐面上の流れは、(14)、(15)、(17)式によって記述されることになる。これは、すでに前項で提示しておいた、地形パターン関数を用いた **Kinematic wave** モデルの形をしている。また、(10)、(13)式より、収束または発散する円錐面では、地形パターン関数 $g(y)$ は y の 1 次式であり、1 次の項の係数は、円錐面が収束するとき負、発散するとき正である。特に、1 次の項の係数が 0 であれば、斜面は矩形平面であることになる。

以上のモデルでは、流域からの流出量を出力としているが、出水特性をみるには、流出高を出力とするようにモデルを変形しておくのが便利である。そのために、地形パターン関数 $g(y)$ と流域面積 F との間に

$$\int_0^1 g(y) dy = F \quad (19)$$

なる関係があることに注意し、正規化した地形パターン関数 $G(y)$ を

$$G(y) = g(y)/F \quad (20)$$

と定義し、

$$W(y, t) = w(y, t)/F, \quad S(y, t) = s(y, t)/F$$

とおくと、(19)、(14)、(17)、(15)式に対応する式

$$\int_0^1 G(y) dy = 1 \quad (21)$$

$$\partial S / \partial t + \partial W / \partial y = G(y) r(t) \quad (22)$$

$$W = G(y) f^* (S/G(y)) \quad (23)$$

$$Q_h(t) = W(1, t) \quad (24)$$

が得られる。ここに、 $Q_h(t)$ は流出高である。収束または発散する円錐面では、 $g(y)$ が、したがって $G(y)$ が1次式になるから、(21)式より、 $G_0 = G(0)$ とおくと、 $G(y)$ は G_0 をパラメタとして、

$$g(y) = 2(1 - G_0)y + G_0 \quad (25)$$

と表わされる。 $G_0 > 1$ では収束する円錐面を、 $G_0 < 1$ では発散する円錐面を、 $G_0 = 1$ では矩形平面を表わすことになる。

さて、以上の準備のもとで、収束または発散する円錐面上の中間流⊕地表面流を追跡し、その出水形態を分析することになろう。中間流⊕地表面流の流量流積関係式は、前節(9)式（前節図2.4参照）で与えられるから、定数 $a > 0$ 、 $\alpha > 0$ 、 $m > 1$ 、 $d > 0$ の意味を前節と同様とし、(18)式を考慮して、

$$a^* = a/L, \quad \alpha^* = \alpha/L \quad (26)$$

とおくと、(23)式中の関数 f^* は

$$\left. \begin{array}{ll} 0 \leq h \leq d \text{ のとき} & f^*(h) = a^* h \\ h \geq d \text{ のとき} & f^*(h) = a^* h + \alpha^* (h-d)^m \end{array} \right\} \quad (27)$$

で与えられる。

以下、

$$d = 100 \text{ mm}, \quad a^* = 0.05 \text{ hr}^{-1}, \quad \alpha^* = 0.5 \text{ mm}^{-2/3} \text{ t}^{-1}, \quad m = 5/3, \quad G_0 = 1.5$$

を標準値として、各パラメタを変化させたときの流出高の変化を考察する。入力降雨 $r(t)$ は、継続時間が10時間で、ピークの降雨強度が20 mm/hrである2等辺三角形のものを考える。A層底からの浸透はここでは考えない。

特別に $d = \infty$ とすると、地表面流は発生せず、系は線形定常で、その単位インパルス応答関数は、

$$G(1-at) = 2(1-G_0)(1-at) + G_0, \quad 0 \leq t \leq 1/a$$

で与えられるから（図3.3参照）、 $G_0 > 1$ である収束する円錐面では、 $G_0 < 1$ である発散する円錐面に比べて流出が遅くなる。ところが、 $d = 100 \text{ mm}$ （これは入力総降雨量

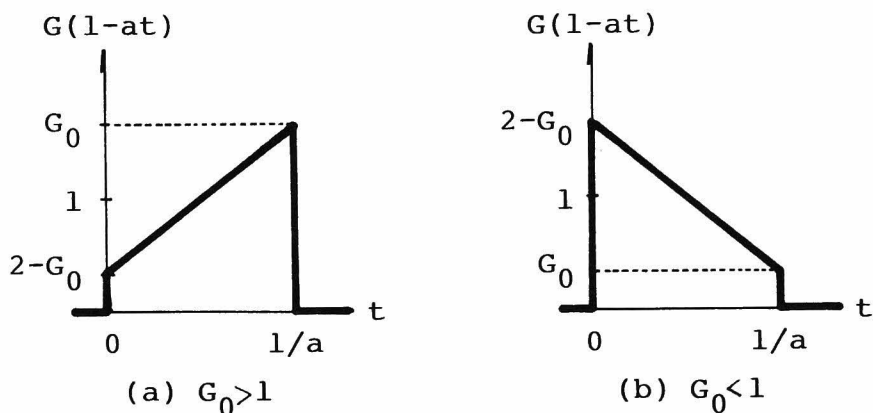


図 3.3 地表面流が発生しない場合
の単位インパルス応答関数

に等しい)とすると様相が異なる。 $G_0 < 1$ では地表面流は発生しないが、 G_0 が1をこえて収束する円錐面になると、その集水効果のため、流れがA層をこえて地表面流を生じる部分がでてくる。地表面流が生じるとそこでの流速は一般に中間流のそれより大きいから、 $d = \infty$ の場合とは逆に、 G_0 が大きいほど出水が急激化する可能性がある。図 3.4 はこの事情を示している。もち

ろん、この効果は、図 3.5 にみられるように、地表面流の定数 α^* が大きいほど、図 3.6 にみられるようにみかけのA層 d が小さいほど顕著である。

以上の数値実験の結果得られる重要な結論の1つは、斜面形態の影響の仕方が必ずしも1方向的でないということである。すなわち、みかけのA層厚 d が大きくて、あるい

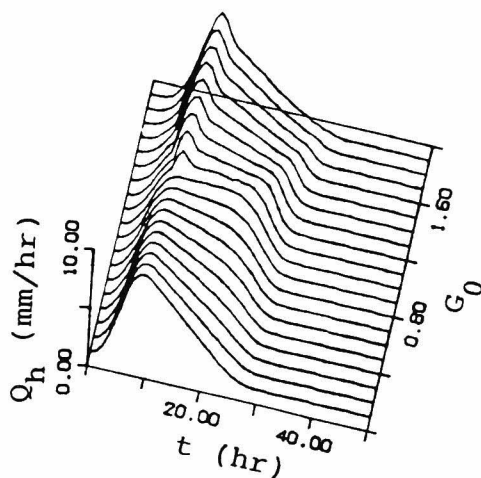


図 3.4 G_0 の変化による出水形態の変化

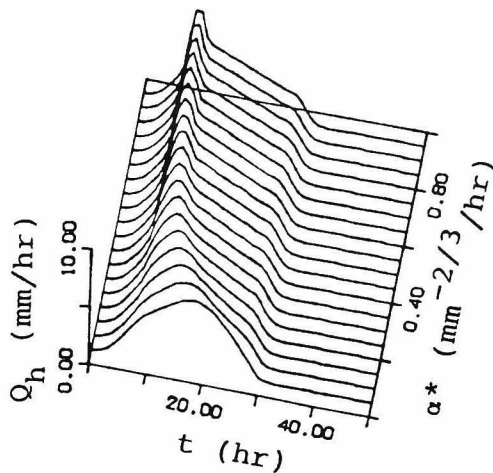


図 3.5 α^* の変化による出水形態の変化

は降雨強度が小さくて、地表面流が生じない場合には、斜面形態が収束的であることは、出水を遅らせる方向に作用するのに対し、みかけのA層厚dが小さくて、あるいは降雨強度が大きくて、地表面流が生じる場合には、斜面形態が収束的であることは、逆に出水を急激化する方向に作用する。これは、出水特性と斜面地形形態との関係を把握するにあたって特に注意を要する点であると思われる。

以上，収束または発散する円錐面，または矩形平面を流域場として，その上の中間流⊕地表面流を考えた。この場合，地形パターン関数は1次式になった。

さらに進んで，円錐面や矩形平面でない流域場の流れをモデル化しようとするとき，問題は複雑になる。まず，金丸の与えた連続式(9)の成立そのものが問題となる。連続式(9)は，b(x)の幅で流れが一樣であるという前提にたっており，一般の曲面上の

流れで成立つものではないからである。したがって，厳密に言うと，一般の山腹斜面の流れを扱うには，少なくとも2次元流れの連続式を用いる必要がある。しかし，そうすると方程式も複雑化し，計算量も増す。

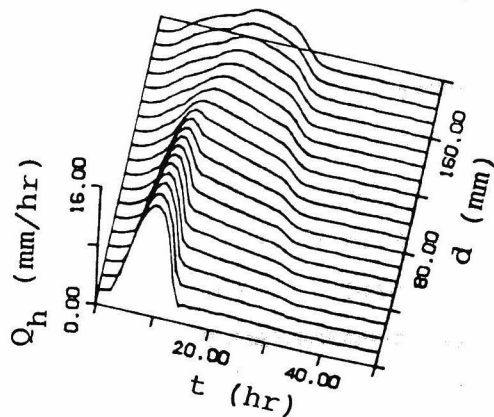


図 3.6 d の変化による出水形態の変化

一方、地形パターン関数を導入した Kinematic wave モデルを単に入出力系のモデルとしてみると、地形パターン関数は必ずしも空間座標の 1 次式である必要はない。とすれば、この地形パターン関数を適当に選ぶことによって、円錐面や矩形平面に限らない複雑な山腹斜面での流れが近似されると期待しうる。ここでは、この点についての検討はしないが、後で、河道網系に対して同様の期待が妥当であることを示す。

第 4 節 裸地域の表面流と中間流出

4.1 裸地域の表面流と出水形態

前節まで、林草地で、しかも A 層に被覆された地域（A 層域とよぶ）の直接流出機構を考察してきた。ところが、山地流域でも、林道・透水性の低い一時的水みち・踏地・岩石の露出部分・河道などのように、降雨の大部分が表面流となって流出する地域が存在する。これらの地域を裸地域と総称しよう。山地流域の直接流出を考える場合、これらの裸地域からの流出を無視できるであろうか。

多くの試験流域での観測結果をみる限り、その面積率が高々 10% 程度の小さなものであっても、これらの裸地域からの流出は無視できない。それどころか、直接流出の大半が裸地域からの流出で説明されるようである。実際、野州川支川荒川試験地での 2 出水についての久保らの流出解析（久保〔1977〕、高棹・椎葉・久保・森川〔1978〕）では、ピーク流量の約 80% が、面積率が約 5% の裸地域（水みちと河道）からの流出分としている。また、安藤・虫明〔1979〕は、大栗川長池試験地と別所試験地の直接流出率がほぼ水みち面積率（長池の面積を含む）に等しいことを見出している。さらに、石原・小葉竹〔1969, 1972〕は、荒川試験地での流出解析の結果、直接流出に及ぼす河道降雨の影響が非常に大きいとしている。石原・小葉竹の観測した表層水も、3～5% の面積率をもつ水みちの流れと解され、表層水と河道降雨をあわせると、ピーク時の流量のほとんどを占めている。これらの試験流域での結果は、Betson〔1964〕の partial source area concept に対応している。

しかしながら、これらの結果から、直ちに、直接流出の主成分がいつでも裸地域からの流出であるというわけにはいかない。筆者は、A 層域と関連して、以上の結果を次のよう

に考える。A層に浸入した雨水は最初毛管水としてA層内に保留されるので、雨水が重力水として流れるA層内側方流れ、すなわち中間流が形成されるにはある程度の雨水補給が必要ではない。一方、裸地域では、損失量も小さいので、降雨の大半は表面流となって流出する。したがって、試験流域で通常観測されるようなreturn periodの小さい規模の降雨では、A層域に中間流が十分に発達しないために、裸地域からの流出が直接流出の大半を占めることになる。すなわち、直接流出の主成分が裸地域からの流出で説明されるのは、降雨規模の小さい小出水の場合であって、降雨規模が大きくなるとA層域からの直接流出を考慮する必要がある。

そこで、降雨規模との関連において考えると、直接流出には、次の3つの型があることになる（高棹 椎葉〔1979〕）。

(A)裸地域の Horton 型表面流のみ、(B)裸地域の Horton 型表面流+A層域の中間流、(C)裸地域の Horton 型表面流+A層域の中間流・飽和表面流

小出水では、(A)の型が生じ、非線形性をもつ。中出水では(B)の型が生じ、非線形性が弱まる。大出水では(C)の型が生じ、再び非線形性が強くなる。このような出水構造の転移に関しては、石原・石原・高棹・頼〔1962〕、石原・高棹〔1964〕が理論的・実証的に検討している。図4.1は、その1例で、

ピーク流量に対応する雨水攪乱の伝ばん時間とその間の平均有効降雨強度の関係を示している。この図で、中間流出と分類されているところを(A)の型、遷移領域を(B)の型、表面流出と分類されているところを(C)の型と読みかえることが可能であろう。こう解釈すると、遷移領域で到達時間がかえって増大していることも説明できるのである。このように、降雨規模によって直接流出の型が異なる現象は、試験流域での散水実験によっても確認されている。実際、Dunne・Black〔1970b〕は、return periodの大きい人工降雨

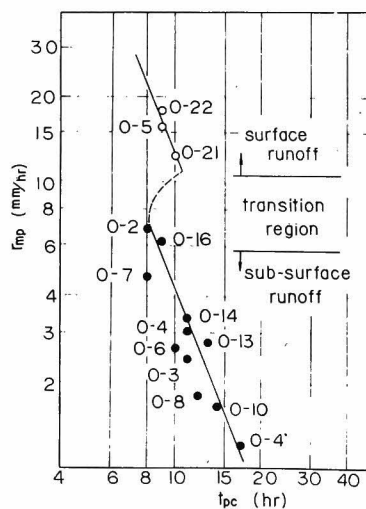


図 4.1 大野ダム流域での、ピーク流量の伝ばん時間と平均有効降雨強度の関係（石原・石原・高棹・頼，1962）

を与えることによって、通常の降雨では発生しなかった表土層上の地表面流の形成を観測している。

以上、裸地域とA層域という流れの場の平面的な分布が、A層域におけるA層とその上の地表面という流れの場の鉛直方向の分布と複合して、直接流出の型を変化させることを説明した。

4.2 裸地域の流れと中間流出

前節では、裸地域の表面流とA層域の流れとの関係については特に意識することなしに議論をすすめた。A層域の流れと裸地域の流れとの関係を考えるのは必ずしも容易ではなく、特に、流れを特性曲線法で追跡するときには、両者の関係を考慮するのは非常に煩雑である。このため、A層域の流れと裸地域の流れとは別々に計算することが多い（高樺・池淵・椎葉〔1977〕）。しかし、計算法として差分法を用いれば、両者の流れの関係を考慮しても、それほど計算量が増すわけではない。そこで、本節では、差分法を適用することを前提にして、裸地域の流れとA層域の流れの関係をもちょうるモデルを提示しよう。

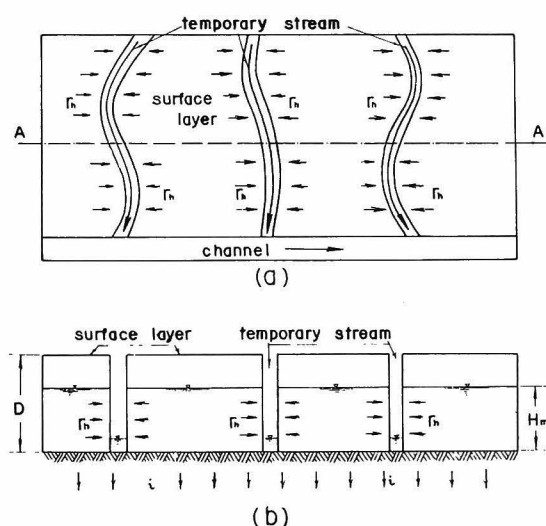


図 4.2 中間流出の生起場とその機構
（石原・石原・高樺・頼，
1962）

A層域の流れと関係しあう裸地域の主たるものは、A層が雨水流によって浸食はく奪されてできた水みちである。こうした水みちでは、直接水みちに落下する降雨と、A層からの浸出水とを受けて表面流が形成される。図 4.2 は、石原・石原・高棹・頼〔1962〕が示したもので、水みちの流れを模式的に表わしている。図中、 r_h は水みちへの中間流出強度、 D は A 層厚、 H_m は A 層内中間流水深である。以下では、こうした水みちの流れの機構と、前節で考察した地形形状効果との両者を考慮したモデルを与え、小流域に適用する。

モデル構成にあたって、次の基本的な仮定を設ける。

(i) A 層域では、中間流が形成されるまでに一定の雨水補給が必要である。この雨水補給が終了してはじめて、中間流が形成される。これを、A 層域の流量流積関係式に組みこむには、中間流が形成されるまでに必要な雨水補給量を D_L として、A 層域の流積の初期値を $-D_L$ とするとよい。すなわち、A 層域の流積が負のとき、その絶対値は、中間流が形成されるまでに必要な雨水補給量を表わし、A 層域の流積が正のときは重力水として流下しうる貯水高を表わすと考えるのである。

(ii) A 層域から水みちへの中間流出は、A 層域の流積が正の場合にのみ生じ、かつその量は A 層域の流積に比例する。これは、図 4.2 中の、中間流出の水みち生起場の単位面積あたり中間流出強度 r_h を一定とすることを意味する。

(iii) A 層域の流積が正の場合の流量流積関係は前節で与えた通りとし、水みち域の表面流の流量流積関係は指数関数で与えられる。

以上の基本的な仮定を設けると、A 層域および水みちの流れの連続式は次のように与えられる。

$$\partial S / \partial t + \partial W / \partial y = (1 - \lambda) G(y) (r - p) - q_h \quad (1)$$

$$\partial S_g / \partial t + \partial W_g / \partial y = \lambda G(y) (r - p_g) + q_h \quad (2)$$

ただし、 y は 0 から 1 の間の値をとるように無次元化された空間座標、 $G(y)$ は 0 から 1 までの y に関する積分値が 1 となるように正規化された地形パターン関数、 r は降雨強度、 p および p_g はそれぞれ A 層底、水みち底の浸透強度である。 S および W は、A 層域の流れの流積と流量に対応する量であって、 W と S の間には、

$$W = (1 - \lambda) G(y) f(S / (1 - \lambda) G(y)) \quad (3)$$

なる関係がある。ただし、上式中の関数 f は、

$$\left. \begin{array}{ll} h \leq 0 \text{ のとき} & f(h) = 0 \\ 0 < h \leq d \text{ のとき} & f(h) = a^*h \\ h > d \text{ のとき} & f(h) = a^*h + \alpha^*(h-d)^m \end{array} \right\} \quad (4)$$

と定められる。ここに、 $a^* > 0$ 、 $\alpha^* > 0$ 、 $d > 0$ 、 $m > 1$ は定数である。また、(2)式中の S_g と W_g は水みち域の流積と流量であって、 W_g と S_g の間には、

$$W_g = \lambda G(y) \alpha_g (S_g / \lambda G(y))^{m_g} \quad (5)$$

なる関係がある。ここに $\alpha_g > 0$ 、 $m_g > 1$ は定数である。(1)、(2)式右辺の q_h は、A層域から水みち域への中間流出強度であり、

$$q_h = \alpha \lambda \max(S, 0) \quad (6)$$

で与えられる。ここに、 $\alpha > 0$ は定数である。全流域からの直接流出高 $Q_d(t)$ は、

$$Q_d(t) = W(1, t) + W_g(1, t) \quad (7)$$

で与えられる。

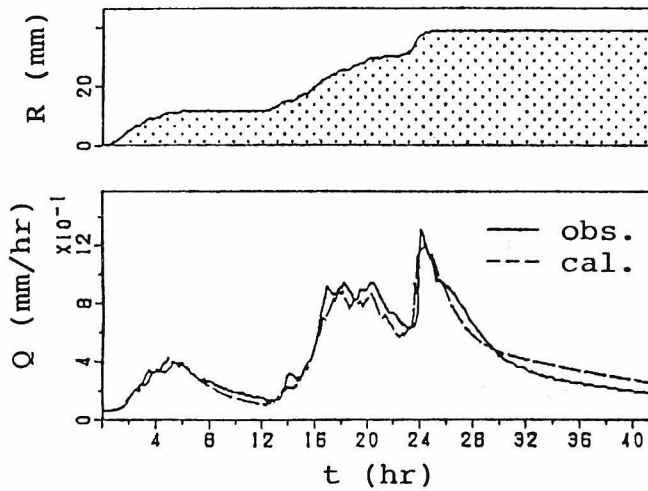


図 4.3 猪子石流域 No. 2 出水の再現

以上の諸式で記述されるモデルを用いて、庄内川猪子石流域の流出を再現した例を図4.3、野州川支川荒川試験地の流出を再現した例を図4.4に示す（前者は、建設省中部地方建設局「庄内川流出試験地水文資料」、1975、後者は、京大防災研究所水文学部門「荒川試験地水文観測資料」、1976、の資料による）。ただし、いずれも初期流出高を

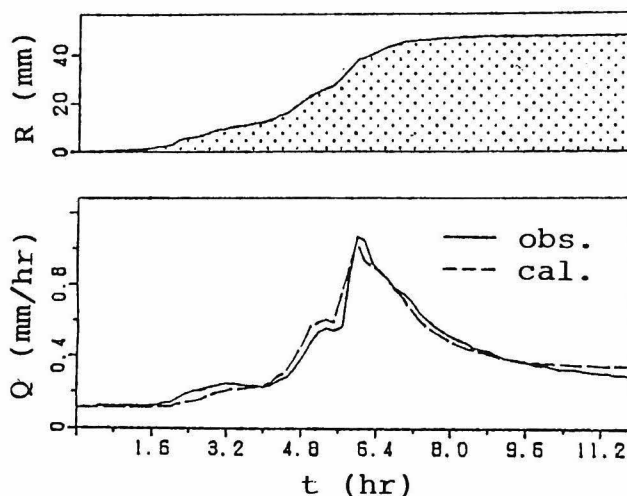


図4.4 荒川試験地No.7107 出水の再現

基底流出高として水平分離法を適用して、(7)式の直接流出高と合算したものを流出高 Q の計算値としている。 R は累加雨量である。浸透強度は、流出域に雨水があれば Horton 式で求められる浸透能で浸透するものとした。最終浸透能と浸透能低減係数は由良川で得られてい 0.27mm/hr 、 0.15hr^{-1} という値をそのまま用いた（石原・田中・金丸〔1956〕）。また、地形パターン関数 $G(y)$ は、前節の(25)式のような1次式とし、 m 、 m_g は計算時間の節減のため、いずれも2とした。その他の未知パラメタは、上田〔1980〕が開発した直接探索プログラムを用いて、計算値と実測値の残差平方和が小さくなるように決定した。表4.1は、これらのパラメタの値を示している。ただし、 i_0 は初期浸透能である。裸地域を代表する水みちの面積率 λ が、猪子石流域で大きく、荒川試験地で小さいのは、前者が完全な山地流域ではなく、一部農地があることを反映しているとみられる。また、いずれの流域についても、取扱った出水の規模が小さく、 A 層を超える地表面流は発生していな

表 4.1 同定されたパラメタの値

Parameter	Inokoshi	Arakawa
α^* (mm·hr) ⁻¹	0.018	0.032
a^* hr ⁻¹	0.005	0.001
d mm	20.	31.
γ hr ⁻¹	0.114	0.161
λ -	0.240	0.047
G_o -	0.750	0.555
i_o mm/hr	0.783	1.091
D_L mm	2.98	9.28

いので、みかけのA層厚は下限値を示しているに過ぎない。

第 5 節 要 約

本章では、山腹斜面の表層付近の流出過程を、Kinematic wave 法を基礎としてモデル化した。特に、第 2 節では、A 層上の地表面流に対して、A 層内流量流積関係式と連続的に接続する流量流積関係式を採用して、中間流と地表面流とを統合的に表現した。第 3 節では、地形パターン関数を導入した Kinematic wave モデルを提示して、地形形状が中間流・地表面流間の流れの転移に及ぼす影響を分析した。さらに、第 4 節では、裸地域と A 層域という流れの場の平面的な分布が、A 層域における A 層とその上の地表面という流れの場の鉛直方向の分布と複合して、直接流出の型を変化させることを示した。ま

た，裸地域を代表するものとして水みちを考え，水みちへの中間流出を考慮するとともに，第2節，第3節で展開した方法を適用した山腹斜面系のモデルを提示して，小流域に適用して，その有効性を示した。

参 考 文 献

- 安藤義久・虫明功臣(1979)：丘陵地における直接流出の生起領域，第16回自然災害シンポジウム講演論文集，pp. 129-132.
- 飯塚 肇(1958)：森林防災工学，森北出版.
- 石原藤次郎・田中要三・金丸昭治(1956)：わが国における単位図の特性について，土木学会誌，第44巻，3号.
- 石原藤次郎・石原安雄・高棹琢馬・頼千元(1962)：由良川の出水特性に関する研究，京大防災研究所年報，第5号A，pp. 147-173.
- 石原藤次郎・高棹琢馬(1959)：単位図法とその適用に関する基礎的研究，土木学会論文集，第60号別刷.
- 石原藤次郎・高棹琢馬(1962)：中間流出現象とそれが流出過程に及ぼす影響について，土木学会論文集，第79号，pp. 15-21.
- 石原藤次郎・高棹琢馬(1964)：洪水流出過程の変換系について，京大防災研究所年報，第7号，pp. 265-279.
- 石原安雄・小葉竹重機(1969)：山地流域における直接流出の生起過程，京大防災研究所年報，第12号B，pp. 247-259.
- 石原安雄・小葉竹重機(1972)：荒川流出試験地における水収支について(2)，京大防災研究所年報，第15号B.
- 岩垣雄一・末石富太郎(1954)：横から一様な流入のある開水路の不定流について — 雨水の流出現象に関する水理学的研究(第1報) — ，土木学会誌39-11，pp. 575-583.
- 上田光三郎(1980)：不等号制約条件下の多変数非線形関数の最大値の直接探索法，京都大学大型計算機センター利用の手引き — プログラム・ライブラリ編，pp. 71-78.

- 金丸昭治(1960): 流出を計算する場合の山腹斜面系の単純化について, 土木学会論文集, 第73号, pp. 7-12.
- 久保省吾(1977): 山間地小流域における流出システムの分析と同定に関する研究, 京都大学修士論文.
- 末石富太郎(1955): 特性曲線法による出水解析について — 雨水の流出現象に関する水理学的研究(第2報) —, 土木学会論文集, 第29号, pp. 74-87.
- 高棹琢馬(1963): 出水現象の生起場とその変化過程, 京大防災研究所年報, 第6号, pp. 166-180.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・北村英和(1976): 分布型出水モデルによるシミュレーションと集中化スケール, 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, Ⅱ-2.
- 高棹琢馬・池淵周一・椎葉充晴(1977): 河道網構造を考慮した河川流域の出水解析法に関する研究, 京大防災研究所年報, 第20号B-2, pp. 185-199.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・久保省吾・森川雅行(1978): 状態変数を用いた流出解析モデルに関する考察, 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, Ⅱ-74.
- 高棹琢馬・椎葉充晴(1979): Kinematic Wave法に基づく流出計算法の総合化について, 京大防災研究所年報, 第22号B-2, pp. 225-236.
- 高棹琢馬・椎葉充晴(1981a): Kinematic wave法への集水効果の導入, 京大防災研究所年報, 第24号B-2, pp. 159-170.
- 谷内俊弥・西原功修(1977): 非線形波動, 岩波書店.
- Betson, R. P. (1964): What Is Watershed Runoff?, Water Resources Research, Vol. 69, No. 8, pp. 1541-1552.
- Dunne, T. and Black, R. D. (1970a): Partial Area Contributions to Storm Runoff in a Small New England Watershed, Water Resources Research, Vol. 6, No. 5, pp. 1296-1311.
- Dunne, T. and Black, R. D. (1970b): An Experimental Investigation of Runoff Production in Permeable Soils, Water Resources Research, Vol. 6, No. 2, pp. 478-490.
- Kirkby (ed.) (1979): Hillslope Hydrology, John Wiley & Sons.

Woolhiser, D. A. (1969): Overland Flow on a Converging Surface, Transactions of ASAE, Vol. 12, No. 4, pp. 460-462.

第4章 河道網系のモデル化

第1節 概 説

河川流域は、複雑に分布する山腹斜面と河道との集合体であり、その地形構造の骨格をなすのが河道網である。本章では、この河道網系の機構を考察する。

山腹斜面系では、雨水流の形態が表面流に限定されず、種々の流れが共存し、関係しあう点がモデル化の焦点となる。これに対し、河道網系では、流れの形態は表面流に限ってよいから、河道の流れのモデル化自体には大きな問題はない。具体的に言えば、指数法則 **Kinematic wave** モデルを考えておけば、実用的には十分である。河道網系で問題となるのは、流れの場である河道が複雑な樹枝状構造をなしているという点にある。すなわち、山腹斜面から流出した雨水が、樹枝状河道網を流下・流集していくときに受ける変換効果が問題となる。

河道網系の変換効果を考える上で、最も基本的であり、正攻法とも言える方法は、河道流を河道網にしたがって逐一追跡していく方法であろう。この方法は、必然的に多大な計算量を必要とするので、電子計算機の出現以前にはあまり採用されなかったようである。しかし、現在では、電子計算機を利用すれば、指数法則 **Kinematic wave** モデルのような非線形の河道流モデルを用いたとしても、河道流を逐一追跡することはさして困難ではない。そこで、本章第2節では、河道流を逐一追跡する方法による河道網系モデルを考えることにし、河道網構造を分析して、電子計算機上での流れの追跡計算システムを構成する手法を考察する。

もちろん、河道流を逐一追跡せず、しかもそれと同等の効果をもつような河道網系モデルが構成されれば、河川流域の流出計算はそれだけ簡便になろう。しかし、何らかの近似を設定することなしには、そのような統合的モデルを構成することは不可能である。粗い近似として、河道流流速が、流積によって変化せず、各河道地点で一定値をとるとする仮定を設けると、問題は簡単になる。実際、この仮定のもとでは、河道上のある地点に流入してきた斜面流出水は、そこから流域下流端までの河道内流下時間だけ遅れて、流域下流端にでてくることになるから、各斜面流出ハイドログラフをそれぞれ対応する河道流下時

間だけずらして重ね合わせると、流域下流端のハイドログラフが得られる。流域内の小流域を代表流域とし、代表流域の流出ハイドログラフを集中時間図によって流域下流端のハイドログラフに変換するという石原・小葉竹〔1974, 1975〕の方法は、河道内流速を一定とするこの仮定に基づいている。Linsley et al.〔1949〕は、流速を一定とするこの仮定によって求められる流域下流端ハイドログラフが、さらに流域下流端にある貯水池への流入量となると考えて、その貯水池からの流出量を最終的な流域下流端ハイドログラフとする方法を述べている。これは、河道における伝播作用を先に考慮し、貯留作用を最後に一括して考えたもので、MeyerのLag-routingの考え方（Linsley et al.〔1949〕）によるものである。立神〔1955〕の単位図法、英国のWatkinsによって提案されたといわれるRRL法（Terstriep・Stall〔1969〕、山口・松原・山守〔1972〕）も、基本的には上記のlag-routingの考え方による。岡本〔1980〕は、逆に、河道の貯留作用を先行させている。いずれにしても、これらの方法は、河道における貯留作用を付加することで、単なる“流速一定”仮定によるよりは適用性を増大させようとするものであるが、本質的には、河道の伝播作用の線形性を仮定している点にその限界があると考えられる。一方、筆者は、前節で、地形パターン関数を導入したKinematic waveモデルを提示した。このモデルでは、流れの伝播の非線形性は容易に考慮できる。よって、地形パターン関数によって河道網構造の効果を反映することができるならば、伝播過程の非線形性を保持したままで、河道網系の統合的モデルが構成されることになる。本章第3節でこの問題を検討する。

なお、本章で考察する河道網系のモデルはいずれも偏微分方程式で記述され、その偏微分方程式を与えられた横流入条件のもとで解くことによって対象地点のハイドログラフが得られる。一方、ピーク流量およびその近傍の流量波形のみを問題にする場合には、位数化された河道配列の構造および河域地形量に関する統計則に基づく合成ピーク理論（高棹〔1967〕、Ishihara・Takasao〔1971〕）が利用できる。この理論の詳細についてはこれらの文献を参照されたい。

第2節 河道網上の河道流の追跡構造

本節では、河道流を河道網構造に即して逐一追跡していく方法を述べる。

2.1 河道網構造

河道網において、水源（水流の出発する地点）、河川合流点、および対象地点（対象水系の最下流端）を合流点と総称する。合流点からそのすぐ下流の合流点までの河道部分を河道区分とよぶ。河道区分は河道網を構成する基本単位である。河道網内の河道区分の接続関係を河道網構造という。

河道網構造は、図 2.1 (b) に示すような平面上の有向グラフで表わすことができる。ただし、この図で、丸囲みの数字で表わす節点は河道区分を表わす。任意の 2 つの河道区分を

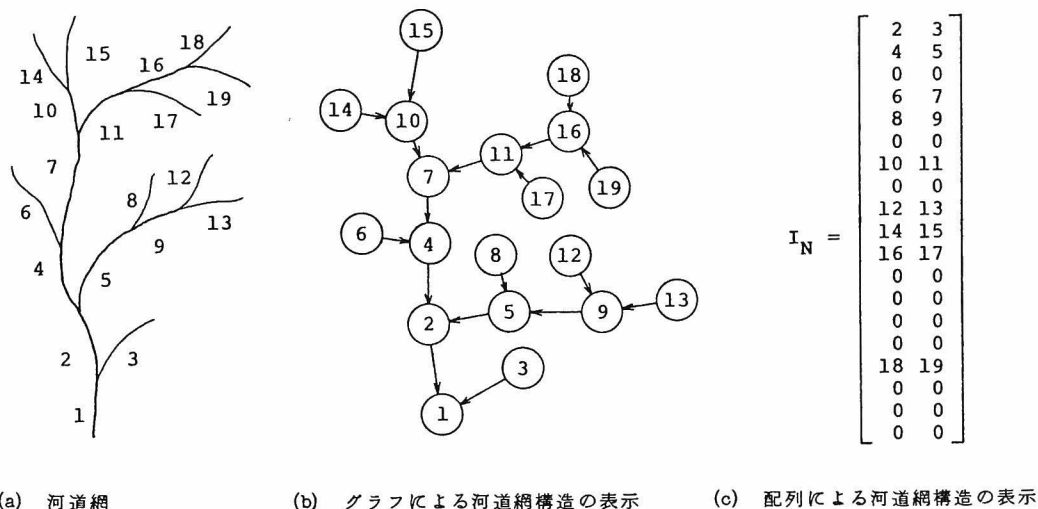


図 2.1 グラフまたは行列による河道網構造の表示

とったとき、一方の河道区分の下流側合流点他方の河道区分の上流側合流点でもあるとき、かつこの場合に限り、前者は後者に流入するといひ、前者を始点とし後者を終点とする有向辺で 2 つの河道区分を結ぶ。

グラフ理論（たとえば、Liu〔1977〕）では、辺の向きを無視したときにループをもたない連結グラフになる有向グラフを有向木といい、出次数 0 の節点がちょうど 1 個だけ存在し、残りのすべての節点の出次数が 1 であるような有向木を根つき木という。ただし、節点の出次数とはその節点を始点とする有向辺の個数であり、節点の入次数とはその節点

を終点とする有向辺の個数をいう。出次数0の節点を根つき木の根という。ある節点をとったとき、その節点から根に至る道（有向辺のつながり）の中に含まれる有向辺の個数をその節点の高さという。根の高さは0である。根つき木で、入次数0の節点を葉、入次数が0でない節点を枝点という。すべての枝点の入次数が2である根つき木を正則な2分木という。図2.1(b)からわかるように、河道網のグラフは正則な2分木である。

図2.1(a)，(b)中の数字は河道区分を識別するためにつけた識別番号である。河道区分の総数を n_c とするとき、1から n_c までの一連の番号をつけるものとする。以後、識別番号が i の河道区分を $L(i)$ と表わす。識別番号のつけ方は任意であるが、

$$\left. \begin{array}{l} \text{河道区分の高さが小さいものから順に高さが同じときは} \\ \text{根を中心に時計方向の順に若い番号をつける} \end{array} \right\} (1)$$

という規則によると後の解析で便利である。この規則によれば、根である河道区分は識別番号1を持つことになる。

河道網構造を視覚的にとらえるには平面上のグラフを用いるのが有効であるが、電子計算機等で処理するには行列を用いて表示するのが便利である。その方法は種々考えられるが、河道網が正則な2分木であることを利用して、次のように定義する $n_c \times 2$ 次行列 I_N を用いるとよい。すなわち、各河道区分 $L(i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n_c$ に対して

$$\left. \begin{array}{ll} L(i) \text{が葉であるとき} & I_N(i, 1) = I_N(i, 2) = 0 \\ L(i) \text{に流入する河道区分が } L(i_1), L(i_2) \text{ のとき} & I_N(i, 1) = i_1, I_N(i, 2) = i_2 \end{array} \right\} (2)$$

と定義するのである。図2.1(b)に示した河道網構造に対する上記行列 I_N を図2.1(c)に示す。

2.2 河道流の追跡構造

2.2.1 河道区分内の河道流の追跡

各河道区分での雨水の流れを図式的に示すと図2.2のようになる。河道区分の上流端か

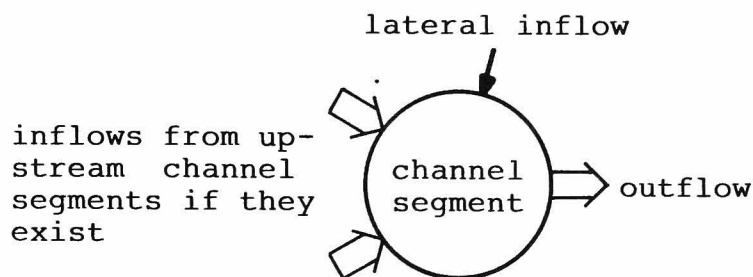


図 2.2 河道区分での雨水の流れ

ら，その河道区分に流入する 2 つの河道区分の流出量が流入し，河道区分への側方流入量を受けて流下して，下流端の流出量となる。この過程は，たとえば Kinematic wave 法でモデル化されるが，ここでは，モデルを特定せず，上流端からの流入量系列，側方流入量系列が与えられれば，下流端の流出量系列が求められるようなモデルとその電子計算機サブプログラムが与えられているものと仮定して議論を進める。側方流入量系列はその河道へ直接降る降雨とその河道区分に接続する斜面からの流出量の系列であるが，ここでは，これらは別途計算されるものと考えておく。

2.2.2 計算順序と流出系列の記憶の様式

枝点である河道区分では，その河道区分の流出系列の計算にとりかかる前に，その河道区分に流入する河道区分の流出系列が求められていなければならない。各河道区分の流出系列を計算していく順序を決定するときには，この前提が満たされるように注意する必要がある。たとえば，河道区分の識別番号を前項の規則(1)にしたがつてつけ，識別番号の大きい順を計算順序とすると，この前提を満たしている。もちろん，計算順序の決め方は幾通りもある。ここでは，ある計算順序が決められたとして，第 i 番目に計算する河道区分を L_i とかくことにする。先に，識別番号 j の河道区分を $L(j)$ とかくことにした。そこで，計算順序と識別番号の対応を表わすために

$$L_i \text{ と } L(j) \text{ が同じ河道区分であるとき, } K(i)=j, K^{-1}(j)=i \quad (3)$$

とかくことにしよう。

さて、河道区分 L_i が河道区分 L_j に流入する場合を考えよう。このとき、 L_i の流出系列は L_j の流出を計算するまで記憶しておき、かつ L_j の流出を計算するときに参照できなければならない。この点に注意して、まず流出系列の記憶の様式を次のように与える。

- (i) 流出系列の記憶場所として (p, m) 次の配列 $Q(p, m)$ を用意する。ただし、 p は河道区分の総数 n_c をこえない整数、 m は各流出系列の長さである。
- (ii) 各河道区分 L_i に自然数 $N(i) \leq p$ を対応させ、 L_i の流出系列を $\{Q(N(i), 1), \dots, Q(N(i), m)\}$ に記憶する。

すべての河道区分の流出系列を相異なる場所に記憶するとすれば、 $p = n_c$ で $N(i)$ と i との対応を 1 対 1 にすることになる。記憶場所を共有することがあれば、 $p < n_c$ であり、 $N(i)$ と i との対応は 1 対 1 ではない。簡単のため、以後、 m 個の記憶容量を 1 単位の記憶容量といい、 $N(i)$ と河道区分 L_i の流出系列の記憶番地という。

枝点である河道区分 L_i の流出を計算するときには、 L_i に流入する 2 つの河道区分の流出系列を参照しなければならない。これらの記憶番地を $I(i, 1)$ 、 $I(i, 2)$ とかくことにする。前項(2)式と(3)式を用いれば、これらは、

$$I(i, k) = N(K^{-1}(I_N(K(i), k))), \quad k = 1, 2 \quad (4)$$

と表わされる。河道区分 L_i が枝点でないときは、これらの値を 0 と定めておくことにする。

2.2.3 河道網上の河道流の追跡構造

以上の準備のもとで、河道網上の河道流の追跡のアルゴリズムは次のようになる。

- (i) $i = 1$ とおく。
- (ii) $I(i, 1) = 0$ の場合、河道区分 L_i は葉であるから上流からの流入量はないとし、 $I(i, 1) \neq 0$ のときは、2 つの流入量系列 $\{Q(I(i, 1), 1), \dots, Q(I(i, 2), m)\}$ を考えて、河道区分 L_i の流出系列を求め、 $\{Q(N(i), 1), \dots, Q(N(i), m)\}$ に記憶する。
- (iii) $i = n_c$ のとき終了。 $i < n_c$ のとき、 i を 1 増やして(ii)へいく。

記憶容量の大きさが制約にならない場合は、流出記憶の単位数 p を河道区分の総数 n_c にとり、 $N(i)$ と i との対応を 1 対 1 対応、たとえば $N(i) = i$ にするとよいが、記憶容量に制約があって、流出記憶の単位数 p をできるだけ小さくとりたい場合には、次項で述べる最適追跡方策を採用するとよい。

2.3 最適追跡方策とその系統的決定法

2.3.1 最適追跡方策

河道区分 L_i が河道区分 L_j に流入するとしよう。このとき、河道区分 L_j の流出を計算した後では河道区分 L_i の流出系列を記憶しておく必要はない。したがって、この後では記憶番地 $N(i)$ のところに、他の河道区分の流出系列を記憶することができる。この事実を利用して流出記憶の単位数を小さくすることができる。河道区分の計算順序も考慮に入れて、使用する流出記憶の単位数が最小となるような河道流の追跡方法を最適追跡方策という。最適追跡方策の計算順序を最適計算順序という。最適追跡方策に関して次の命題が成立つ（高棹・椎葉〔1976〕）。

〔命題〕 最適追跡方策によると流出記憶の単位数 p は、最大位数（最下流河道区分の位数） k で必要かつ十分である。ただし、位数は Horton-Strahler 方式によるものとする（たとえば、Chow〔1964〕を参照）

（証明） 最大位数に関する数字的帰納法によって証明する。最適計算順序もこの証明中で帰納的に与える。最大位数が 1 のときにこの命題は明らかに成立つ。計算順序も自明である。 k を 2 以上の任意の整数とし、最大位数が k より小さいときにこの命題が成立する最適計算順序が得られていると仮定し、最適計算順序を与える。証明の途中で、記号 $\mathcal{Q}(j)$ を用いる。これは、識別番号 j の河道区分 $L(j)$ の下流側合流点で元の河道網から切り離れた部分河道網を表わす。

いま、最大位数 k を持つ河道区分が全部で r 個あるとし、これらを下流から順に M_1 , M_2 , \dots , M_r と表わす。 M の添え字はその河道区分の高さを表わすことになる。これらの位数 k の河道区分には位数 $k-1$ 以下の河道区分が $r+1$ 個流入する。この $r+1$ 個の河道区分の識別番号を高さの小さい順に T_1 , T_2 , \dots , T_{r+1} と表わす。ただし、 $L(T_r)$ と $L(T_{r+1})$ だけは同じ高さをもち、その位数もいずれもちょうど $k-1$ である。最適計算順序を考える上では、この 2 つの河道区分は同等であるが、便宜上、識別番

号の小さい方を T_{r+1} と表わすことにする。位数 k の河道区分を除くと、すべての河道区分は部分河道網 $\Omega(T_1)$, $\Omega(T_2)$, \dots , $\Omega(T_{r+1})$ のいずれかに属する (図 2.3)。

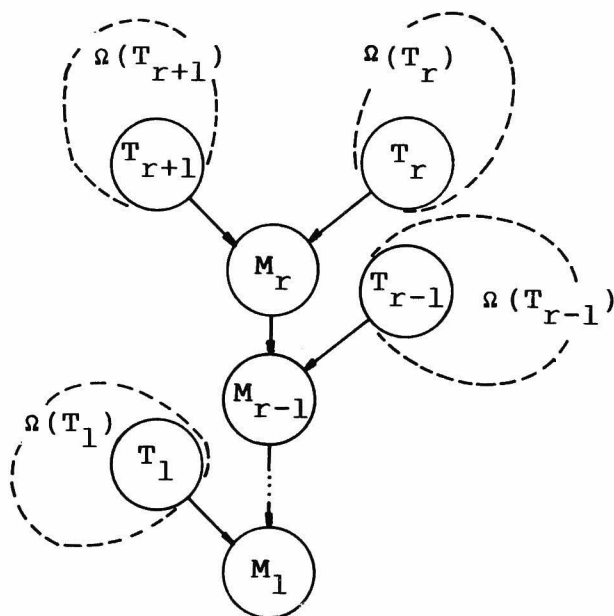


図 2.3 最適追跡方策の説明図

まず、各河道区分の計算順序を次の様式で帰納的に定めるものと仮定する。

- (i) 各河道区分にはラベルという k 次元数ベクトルを対応させる。河道区分 $L(j)$ のラベルを $a(j) = (a_1(j), \dots, a_k(j))$ と表わす。河道区分 $L(M_q)$, $q = 1, \dots, r$ に対するラベル $a(M_q)$ は、第 k 成分だけが q で、他の成分は 0 と定める。すなわち、

$$a(M_q) = (0, \dots, 0, q), \quad q = 1, \dots, r \quad (5)$$

位数 k 以外の河道区分は位数 $k-1$ 以下の部分河道網のいずれかに属する。いま、任意の河道区分 $L(j)$ が $\Omega(T_q)$ ($1 \leq q \leq r+1$) に属するとし、河道区分 $L(T_q)$ の位数を $u(T_q)$ とかくことにする。部分河道網 $\Omega(T_q)$ の中で考えた河道区分 $L(j)$ のラベル $a(j)$ は $u(T_q)$ 次元であるが、 $u(T_q) < k-1$ のときは $u(T_q) < i \leq k-1$ に対して

$a'_1(j)=0$ において、 $a'(j)$ を $k-1$ 次元に拡張するとする。このとき河道区分 $L(j)$ のラベルは、第 k 成分を q 、他の成分は $a'(j)$ の各成分に等しいものと定める。すなわち、

$$L(j) \in \mathcal{Q}(T_q) \text{ のとき } a(j) = (a'_1(j), \dots, a'_{k-1}(j), q) \quad (6)$$

と定める。(5)、(6)式によって各河道区分にラベルをつけると、各河道区分は相異なるラベルをもつ。

- (ii) 任意の2つの河道区分 $L(i)$ 、 $L(j)$ をとったとき、 $q = k, k-1, \dots, 1$ の順にラベルの成分 $a_q(i)$ 、 $a_q(j)$ の大きさを比較し、最初に大きい成分をもつ河道区分の流出系列を先に計算するものとする。たとえば、 $a_k(i) > a_k(j)$ であれば、河道区分 $L(i)$ の流出系列を河道区分 $L(j)$ の流出系列より先に計算する。

この計算順序によれば、図2.3の場合、最初に部分河道網 $\mathcal{Q}(T_{r+1})$ の河道区分群、次に、部分河道網 $\mathcal{Q}(T_r)$ の河道区分群、以下、河道区分 $L(M_r)$ 、 $\mathcal{Q}(T_{r-1})$ の河道区分群、河道区分 $L(M_{r-1})$ 、…の順に流出系列を計算していくことになる。このような計算順序の定め方が実は最適計算順序を与えるのであるが、ここでは、最大位数が k より小さいときにその定め方が最適であると仮定しておく。そうすると、各部分河道網 $\mathcal{Q}(T_q)$ ($1 \leq q \leq r+1$) ではこの命題が成立つことになる。

さて、上に定めた計算順序によれば、流出記憶の単位数 p は k で必要かつ十分なことを示そう。最初に、部分河道網 $\mathcal{Q}(T_{r+1})$ の河道区分群の流出系列を計算するが、帰納法の仮定と $\mathcal{Q}(T_{r+1})$ の最大位数が $k-1$ であることから、 $p \geq k-1$ でなければならない。計算された河道区分 $L(T_{r+1})$ の流出系列を1単位の記憶容量に記憶すると $p-1$ 単位の記憶容量が余る。次に、部分河道網 $\mathcal{Q}(T_r)$ の河道区分群の流出系列を計算するが、 $\mathcal{Q}(T_{r+1})$ の場合と同じ理由で、 $p-1 \geq k-1$ でなければならない。河道区分 $L(T_r)$ の流出系列が計算されれば、これを $L(T_{r+1})$ の流出系列とは別の1単位の記憶容量に記憶する。このために、 $p \geq 2$ でなければならない。 $L(T_{r+1})$ と $L(T_r)$ の流出系列が求められれば、河道区分 $L(M_r)$ の流出系列が求められるから、これを1単位の記憶容量に記憶する。 $r=1$ のときはこれで終りである。 $r > 1$ のとき、さらに、残った $p-1$ 単位の記憶容量で部分河道網 $\mathcal{Q}(T_{r-1})$ の河道区分群の流出系列を求めるが、 $\mathcal{Q}(T_{r-1})$ の最大位数は $k-1$ 以下であるから、 $p-1 \geq k-1$ であれば十分である。河道区分

$L(T_{r-1})$ の流出系列を $L(M_r)$ とは別の 1 単位の記憶容量に記憶するために、 $p \geq 2$ でなければならない。 $L(T_{r-1})$ と $L(M_r)$ の流出系列が求められれば、河道区分 $L(M_{r-1})$ の流出系列が求められる。以下同様に考えると、結局、 $p \geq k$ ($k \geq 2$ であった) であれば、最下流河道区分の流出系列が計算できることになる。すなわち、 $p = k$ が必要かつ十分である。

次に、他のいかなる計算順序を採用しても、 $p < k$ とはできないことを示す。かりに、 $p \leq k-1$ であるようにできる計算順序があるとすると矛盾することを示す。2つの部分河道網 $\mathcal{Q}(T_r)$ 、 $\mathcal{Q}(T_{r+1})$ に属する河道区分のうち、この計算順序で最も先になる河道区分を $L(j)$ とする。 $L(j)$ が $\mathcal{Q}(T_r)$ に属するとする。 $L(j)$ の流出系列を記憶するのに 1 単位の記憶容量が要る。 $L(j)$ の流出系列は、 $L(j)$ が流入する河道区分の流出系列の計算が終了するまで記憶されていなければならないが、 $L(j)$ が流入したその河道区分の流出系列がまた記憶されねばならないから、結局 $L(M_r)$ の流出系列の計算にとりかかるまでは、部分河道網 $\mathcal{Q}(T_r)$ 内の河道区分の流出系列を記憶するのに少なくとも 1 単位の記憶容量は専有され続ける。しかも、その間に河道区分 $L(T_{r+1})$ の流出系列を計算することになる。とすれば、最大位数 $k-1$ の部分河道網 $\mathcal{Q}(T_{r+1})$ の河道流の追跡計算が高々 $p-1$ 単位の記憶容量でできることになる。仮定により $p-1 \leq k-2$ であるから、これは矛盾である。 $L(j)$ が $\mathcal{Q}(T_{r+1})$ に属するとしても同じことになる。

よって、先に与えた計算順序は最適計算順序である。

これで、この命題は証明された。

一般に、位数 u の流路区間 (位数が同一の河道区分のつらなり) の個数 N_u と位数 u の間には、河道数則

$$N_u = R_b^{k-u}$$

が成立つ。ただし、 k は最下流河道区分の位数、 R_b は分岐比で、およそ 4 である。

(Ishihara・Iwasa・Takasao〔1967〕, 石原・高棹・瀬能〔1969〕)。河道区分の総数 n_c と N_1 の間には、 $n_c = 2N_1 - 1$ なる関係があるから、河道数則によれば、 n_c は

$$n_c = 2R_b^{k-1} - 1$$

によって幾何数列的に増大する。よって、最適追跡方策を用いれば、全河道区分の流出系

列を相異なる場所に記憶する場合に比べて、大幅に記憶容量が節約されることがわかる。

2.3.2 最適追跡方策の系統的な決定法

最適追跡方策を具体的に与えるためには、河道網構造に基づいた系統的な解析が必要である。以下に、最適計算順序、各河道区分 L_i の流出系列の記憶番地 $N(i)$ 、 L_i に流入する河道区分の流出系列の記憶番地 $I(i, 1)$ 、 $I(i, 2)$ の系統的な決定手順を述べる。

(i) 2.1 の(1)で述べた規則によって各河道区分に識別番号をつけ、(2)式によって河道網構造を表わす行列 I_N を定める。

(ii) $i = n_c, n_c - 1, \dots, 1$ の順に、河道区分 $L(i)$ の位数を $u(i)$ を

$$u(i) = \lceil \log_2 \{ 2^{u(I_N(i, 1))} + u(I_N(i, 2)) \} \rceil$$

によって求める。ただし、右辺の $\lceil \cdot \rceil$ は $\lceil \cdot \rceil$ の中の数を超えない最大整数である。特に、最大位数 k は $u(1)$ で与えられることに注意する。これが、最適追跡方策で必要かつ十分な流出記憶の単位数である。

(iii) 各河道区分 $L(j)$ にラベルをつける。ラベルのつけ方は、(5)、(6)式で与えたが、次の規則によると、識別番号の小さい順に系統的に決定できる。

すなわち、最下流の河道区分 $L(1)$ のラベル $a(1)$ は、

$$a_k(1) = 1, i \neq k \text{ に対して } a_i(1) = 0$$

とする。また、河道区分 $L(j)$ に流入する 2 つの河道区分の識別番号を j_1, j_2 ($j_1 < j_2$) とし、 $u(j_1) \neq u(j) - 1$ であれば、

$$\begin{aligned} t = 1, 2 \text{ について } i = u(j_t) \text{ で } a_i(j_t) &= a_i(j) + 1, \\ i = u(j_t) \text{ で } a_i(j_t) &= a_i(j) \end{aligned}$$

とする。 $u(j_1) = u(j) - 1$ のときは、上式で $t = 1$ の場合だけ、次のように変更する。

$$\begin{aligned} i = u(j_1), u(j) \text{ で } a_i(j_1) &= a_i(j) + 1 \\ i \neq u(j_1), i \neq u(j) \text{ で } a_i(j_1) &= a_i(j) \end{aligned}$$

この規則が(5)，(6)式と同じであることは，図 2.3 を参照すれば明らかである。よって，前述した最適追跡方策に関する命題の証明中に述べた規則により，最適計算順序が求められる。

(Ⅳ) 最適計算順序が決定されれば，図 2.4 に示したアルゴリズムによって， i 番を計

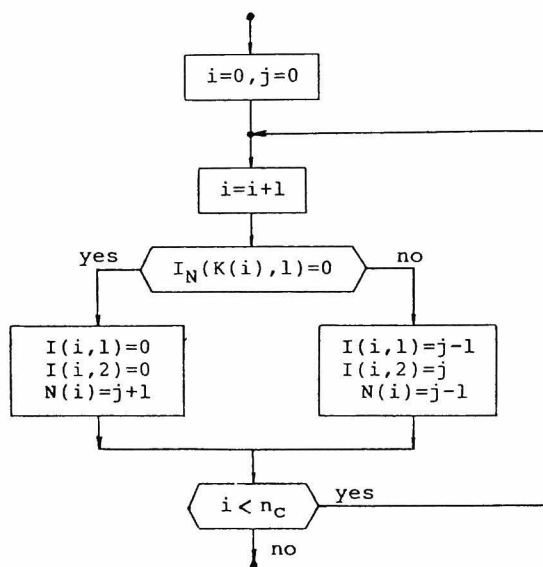


図 2.4 流出系列記憶番地決定アルゴリズム

算順位とする河道区分 $L(i)$ の流出系列の記憶番地 $N(i)$ ， $L(i)$ に流入する河道区分の流出系列の記憶番地 $I(i, 1)$ ， $I(i, 2)$ を求めることができる。ただし，図中の $I_N(K(i), 1)$ が 0 であれば，河道区分 L_i に流入する河道区分がないことに注意する。

以上で，最適追跡方策が確定される。表 2.1 に，図 2.1 に例示した河道網に以上の手順を適用した例を示す。最適追跡方策が確定した後は，前項で述べた河道網上の河道流の追跡のアルゴリズムがそのまま適用できる。

表 2.1 最適追跡方策の決定例

j #	$I_N(j, t)$ t=1, 2		u #	label	i #	$I(i, t)$ t=1, 2		N(i)
1	2	3	3	0 0 1	19	1	2	1
2	4	5	3	0 0 2	17	1	2	1
3	0	0	1	1 0 1	18	0	0	2
4	6	7	3	0 0 3	11	1	2	1
5	8	9	2	0 1 2	16	2	3	2
6	0	0	1	1 0 3	10	0	0	1
7	10	11	3	0 0 4	9	1	2	1
8	0	0	1	1 1 2	15	0	0	3
9	12	13	2	0 2 2	14	2	3	2
10	14	15	2	0 1 5	3	1	2	1
11	16	17	2	0 1 4	8	2	3	2
12	0	0	1	1 3 2	12	0	0	2
13	0	0	1	1 2 2	13	0	0	3
14	0	0	1	1 2 5	1	0	0	1
15	0	0	1	1 1 5	2	0	0	2
16	18	19	2	0 2 4	6	2	3	2
17	0	0	1	1 1 4	7	0	0	3
18	0	0	1	1 3 4	4	0	0	2
19	0	0	1	1 2 4	5	0	0	3

j : Identification number
u : Horton-Strahler order
i : Calculation order

2.4 流域単位概念の導入

河道区分と河道区分に接続する斜面とをまとめて流域単位とよぶことにしよう。流域単位の雨水の流れは、図 2.5 のように模式的に表わされる。この図と河道区分の雨水の流れを表わす図 2.2 とを比較すると、入出力関係の点からは、図 2.2 の横流入、河道区分が、この図の降雨、流域単位に対応すると考えることができる。このように考えると、前項までに展開した河道網上の河道流の追跡構造は、流域単位を構成単位とする流域単位網上の雨水の流れの追跡にもそのまま適用できることになる。

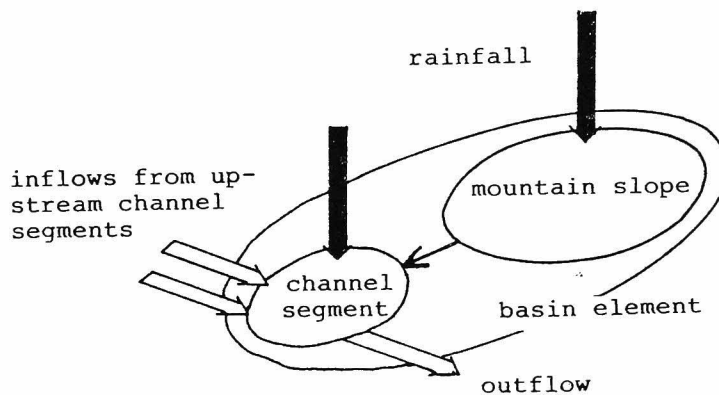


図 2.5 流域単位の雨水の流れ

2.5 実流域への適用例

高棹・池淵・椎葉〔1977〕は，前項までに展開した方法を由良川上流荒倉流域（図 2.6）に適用した。以下，この適用例の概略を述べよう。

2.5.1 流域単位のシステムモデル

流域単位は河道区分とそれに接続する斜面とからなる。この流域単位の雨水の流れのシステムモデルの構造を図 2.7 に示す。遮断システムでは，降雨が一定の遮断量を満たすまで降雨系列から遮断による損失を差引く。A 層域ではさらに表土層の土湿不足を補うために一部を損失として遮断後の降雨系列から差引く。水みち。A 層域の流出は第 3 章で述べた Kinematic wave モデルで取扱う。ただし，ここでは斜面を矩形平面とし，水みちへの中間流出は考えていない。水みち・A 層域下への浸透能は下層の土層の貯水量の 1 次

関数とし，下層からの流出量はその貯水量の2次関数としている。以上の斜面システムからの流出量と河道降雨とが河道区分への横流入となる。河道区分の流れはManningの抵抗則を用いた指数法則Kinematic waveモデルで取扱っている。



図 2.6 荒 倉 流 域 図

2.5.2 河道網の追跡構造

国土地理院発行の5万分の1の地形図の河道表示によると，荒倉流域（流域面積159 km^2 ）の河道網は105個の河道区分より成っている。これらの105個の河道区分に，2.1で述べた規則(1)によって下流から順に識別番号をつけ，その接続構造を示したのが図2.8である。Horton Strahler方式によるこの河道網の最大位数は4であるから，最適追跡方策によると流出記憶の単位数は4である。前項までに述べた方法によって求めた最

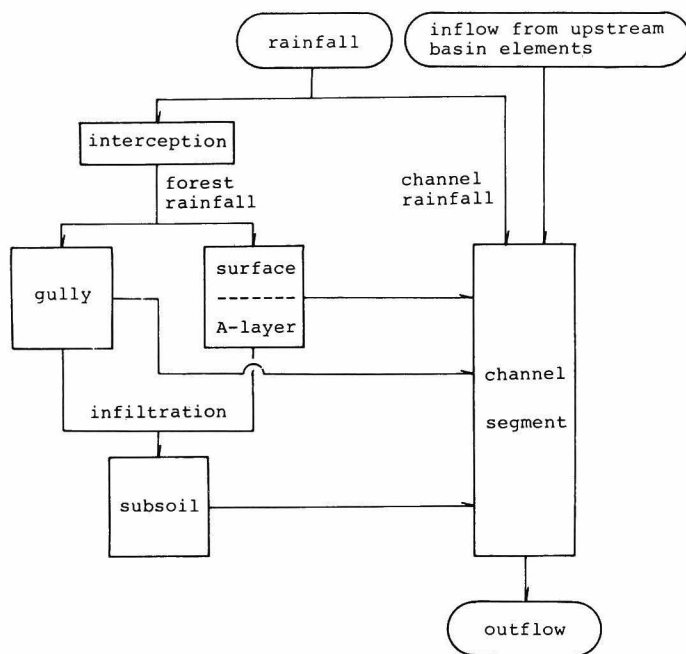


図 2.7 流域単位システムモデルの構造

適追跡方策の計算順序，流入系列・流出系列の記憶番地を表 2.2 に示す。

2.5.3 計 算 例

対象とした出水は，昭和40年9月16日から19日までの3日間の出水で，図 2.9 に時間雨量・流量の観測値を示す。この観測資料を検討した結果，流出量が降雨量に比して大きすぎ，観測精度に問題があることがわかったので，計算流量と観測流量の時間配分ができるだけ近くなるように斜面システムの未知パラメタを調整した。河道区分のパラメタである河道区分長，河道区分の勾配は地形図より求め，河道の粗度係数は $0.04 \text{ m}^{1/3} \text{ sec}$ に固定し，河道断面形状は九州諸河川で上田〔1961〕が得た結果をそのまま適用して固定した。

図 2.10 は，斜面システムの未知パラメタを前述のように調整したときの荒倉地点の流出量と，河道網系の効果を見無視したときの荒倉地点の流出量とを比較したものである。後

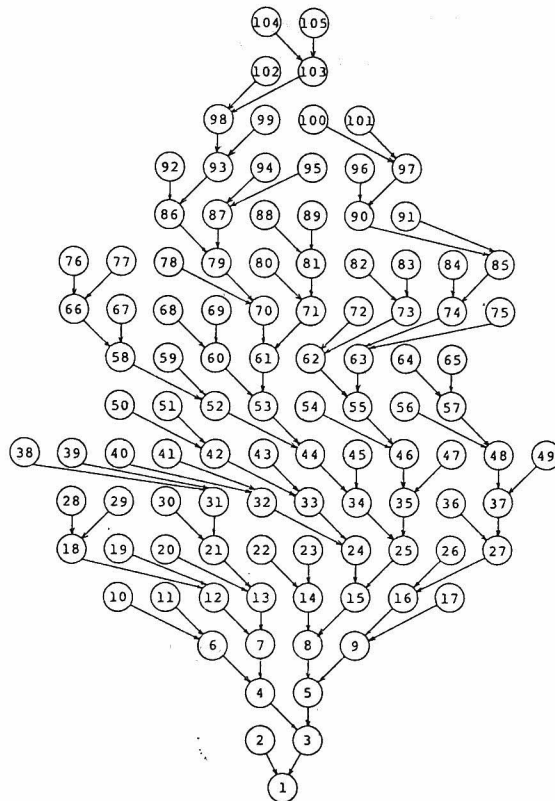


図 2.8 荒倉地域の河道網構造

者は、河道降雨と斜面流出量が遅れ時間なしで流域下流端に到達するとして得られる。河道網系の効果によって流出が幾分偏平化され、ピーク流量が約 30% 減少していることがわかる。荒倉地域（流域面積 159 km²）程度の大きさになると、河道網系の効果を無視することはできないようである。

表 2.2 最 適 追 跡 方 策

i : Calculation order
 ID : Identification number
 I_i^1, I_i^2 : Memory addresses for inflow series
 N_i : Memory address for outflow series

i	ID	I_i^1, I_i^2	N_i	i	ID	I_i^1, I_i^2	N_i	i	ID	I_i^1, I_i^2	N_i
1	104	0, 0	1	36	82	0, 0	2	71	8	2, 1	1
2	105	0, 0	2	37	83	0, 0	3	72	64	0, 0	2
3	103	1, 2	1	38	73	2, 3	2	73	65	0, 0	3
4	102	0, 0	2	39	72	0, 0	3	74	57	2, 3	2
5	98	2, 1	2	40	62	3, 2	2	75	56	0, 0	3
6	99	0, 0	2	41	100	0, 0	3	76	48	3, 2	2
7	93	1, 2	1	42	101	0, 0	4	77	49	0, 0	3
8	92	0, 0	2	43	97	3, 4	3	78	37	2, 3	2
9	86	2, 1	2	44	96	0, 0	4	79	36	0, 0	3
10	94	0, 0	2	45	90	4, 3	3	80	27	3, 2	2
11	95	0, 0	3	46	91	0, 0	4	81	26	0, 0	3
12	87	2, 3	2	47	85	3, 4	3	82	16	3, 2	2
13	79	1, 2	1	48	84	0, 0	4	83	17	0, 0	3
14	78	0, 0	2	49	74	4, 3	3	84	9	2, 3	2
15	70	2, 1	1	50	75	0, 0	4	85	5	1, 2	1
16	88	0, 0	2	51	63	3, 4	3	86	28	0, 0	2
17	89	0, 0	3	52	55	2, 3	2	87	29	0, 0	3
18	81	2, 3	2	53	54	0, 0	3	88	18	2, 3	2
19	80	0, 0	3	54	46	3, 2	2	89	19	0, 0	3
20	71	3, 2	2	55	47	0, 0	3	90	12	2, 3	2
21	61	1, 2	1	56	35	2, 3	2	91	38	0, 0	3
22	68	0, 0	2	57	25	1, 2	1	92	39	0, 0	4
23	69	0, 0	3	58	40	0, 0	2	93	31	3, 4	3
24	60	2, 3	2	59	41	0, 0	3	94	30	0, 0	4
25	53	2, 1	1	60	32	2, 3	2	95	21	4, 3	3
26	76	0, 0	2	61	50	0, 0	3	96	20	0, 0	4
27	77	0, 0	3	62	51	0, 0	4	97	13	4, 3	3
28	66	2, 3	2	63	42	4, 3	3	98	7	2, 3	2
29	67	0, 0	3	64	43	0, 0	4	99	10	0, 0	3
30	58	2, 3	2	65	33	3, 4	3	100	11	0, 0	4
31	59	0, 0	3	66	24	2, 3	2	101	6	3, 4	3
32	52	2, 3	2	67	15	2, 1	1	102	4	3, 2	2
33	44	2, 1	1	68	22	0, 0	2	103	3	2, 1	1
34	45	0, 0	2	69	23	0, 0	3	104	2	0, 0	2
35	34	1, 2	1	70	14	2, 3	2	105	1	2, 1	1

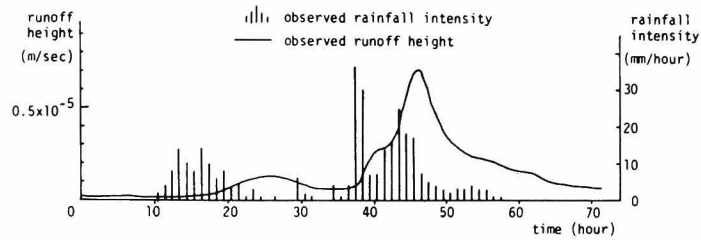


図 2.9 対象出水の観測値

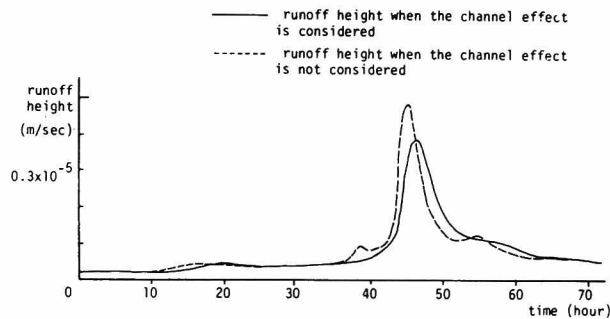


図 2.10 河道網系効果を考慮するときと無視するときの流出の比較

第 3 節 河道網系の統合的表現

本節では、各河道区分の河道流が指数法則 **Kinematic wave** 式で記述され、その **Kinematic** 定数、河道区分への横流入強度が空間的に一様であるという仮定のもとで、横流入強度から河道網下流端流量への変換が、第 3 章 3.2 で提示した地形パターン関数を用いた **Kinematic wave** モデルで統合的に表現されることを示す。まず、河道網が放射状である場合、ついで、河道網が放射状でなくても流れが線形である場合について、こ

の統合的表現を導く。放射状ではない河道網での非線形のKinematic wave 流れについては、厳密には前節で述べた方法によって各河道区分の流れを逐一追跡していかざるを得ないが、近似的な意味では、やはり地形パターン関数を用いたモデルで統合的に表現されることを示す（高棹・椎葉〔1981〕）。

3.1 放射状河道網系の統合的表現

ここでいう放射状河道網とは、分岐比 2 を持ち、同一位数の河道区分は同一の距離を持つような河道網をいう（図 3.1 ）。

このような放射状の河道網において、位数 1 の河道区分の上流端からの距離が x であるような河道区分の本数を $N(x)$ ，河道への単位距離あたりの横流入強度を $r(t)$ ，河道流の通水断面積を $h(x, t)$ ，河道流量を $q(x, t)$ ，最下流端の流出量を $Q(t)$ ，主河道長を L と表わすことにする。河道流量 q と通水断面積 h の間には，

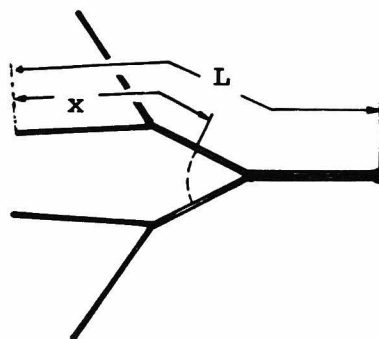


図 3.1 放射状河道網の例

$$q = \alpha h^m \quad (1)$$

（ $\alpha > 0$ ， $m \geq 1$ は定数）なる関係があるものとする。河道区分での雨水の連続式は，

$$\partial h / \partial t + \partial q / \partial x = r(t) \quad (2)$$

であり，流出量 $Q(t)$ は

$$Q(t) = q(L, t) \quad (3)$$

として求められる。本項に限らず，本節では α ， m ， $r(t)$ は空間的に一様と仮定する。

位数 1 の河道区分上流端からの距離が x である河道上の地点は $N(x)$ 個あり，それらのすべてで流量，通水断面積が等しいことに注意すると，位置 x での通水断面積，河道流量の

和はそれぞれ $N(x)h(x, t)$, $N(x)q(x, t)$ で与えられる。また、各河道区分長ごとに $N(x)$ は一定値をとることに注意すると、(2)式より、

$$\partial/\partial t (N_h) + \partial/\partial x (N_q) = N_r(t) \quad (4)$$

を得る。よって、変数変換

$$y = x/L, \quad g(y) = LN(Ly), \quad s(y, t) = LN(Ly)h(Ly, t),$$

$$w(y, t) = N(Ly)q(Ly, t), \quad \alpha^* = \alpha/L$$

を用いると、(1), (4), (3)式は

$$w = g(y)\alpha^*(s/g(y))^m \quad (5)$$

$$\partial s/\partial t + \partial w/\partial y = g(y)r(t) \quad (6)$$

$$Q(t) = w(1, t) \quad (7)$$

と変形される。これは、 $g(y)$ を地形パターン関数とする Kinematic wave モデルである。(5)～(7)式のように表現することによって、河道網内の各河道区分の流れを個別に考えるのではなく、単一の方程式系で河道網系が統合的に表現されたことになる。

3.2 線形河道網系の統合的表現

本項では、放射状に限らない一般の河道網を考えるが、系は線形と仮定する。すなわち、(1)式において、 $m=1$ と仮定する。

L を主河道長とし、流域下流端までの距離が x' である河道上の地点数を $N(x)$ (ただし、 $x = L - x'$) とする (図 3.2)。放射状の河道網に対しては、この $N(x)$ の定義と前項の定義とは

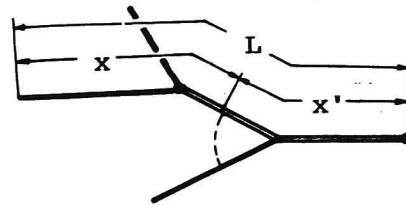


図 3.2 $N(x)$ の定義
(この例では、 $N(x)=2$)

同じ値を与える。 $r(t)$, $h(x, t)$, $q(x, t)$, α の意味は前項と同じとすると, 各河道区分の流れは, (1), (2)式で計算される。位置が x の河道上の地点は $N(x)$ があるが, 前項と異なり, この $N(x)$ 個の地点の通水断面積, 河道流量は一般に等しくない。しかし, 系の線形性により, この $N(x)$ 個の地点の河道流量の和と通水断面積の和との比が α になる。よって,

$$y = x/L, g(y) = LN(Ly), s(y, t) = L \sum h(Ly, t),$$

$$w(y, t) = \sum q(Ly, t)$$

(\sum は同一位置 Ly を持つ河道地点の全てについての和をとることを表わす)とおくと, 前項の(5)~(7)式が成立つ(もちろん, $m=1$)。

こうして, 河道網が放射状でなくても, 系が線形であれば, 河道網系は地形パターン関数を用いた **Kinematic wave** モデルで統合的に表現されることが示された。

3.3 一般の河道網系の統合的表現

前項までに述べたように, 河道網が放射状であるかまたは系が線形である場合は, 地形パターン関数を導入した **Kinematic wave** モデルで河道網系を統合的に表現することができるが, 河道網が放射状でもなく, かつ系が線形でもない一般の場合には, このモデルで厳密に表現できるとはいえない。しかし, 近似的な意味では, 地形パターン関数を適当に選ぶことによって, 非線形でかつ放射状でない河道網系でもこのモデルで統合的に表現できる。これを数値実験によって示す。

数値実験の対象とする河道網は, 河道区分数が13で, トポロジカルに相異なるものの全体とする。各河道区分が左から流入するか右から流入するかの区別を無視すると, このような河道区分は全部で11個あり, 図3.3のように15~25の番号をつける(この番号は, 藤田[1975]による)。河道区分長は全て等しく5kmとする。河道流の **Kinematic** 定数 α , m はそれぞれ, $0.1 \text{ m}^{0.1}/\text{sec}$, 1.45とする。入力である横流入としては, ピーク値が 2 l/sec/m , 継続時間が20時間の2等辺3角形のもの (INPUT 1, 図3.4), ピーク値が 2 l/sec/m , 継続時間が30時間の台形状のもの (INPUT 2, 図3.5) を考える。横流入開始時には, 河道流の通水断面積は0とする。

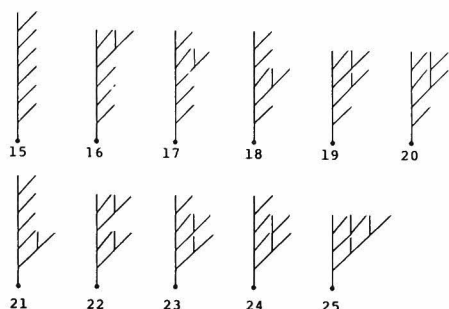


図 3.3 河道区分数が 13 の河道網

1.45 とする。以下で、QPAT という記号はこの方法を表わす。

(iii) 単一方程式系(5)~(7)式で、地形パターン関数と α^* を未知定数とみなし、INPUT 1 に対して(i)で求められる流出流量に適合するようにこれらの未知定数を最適化する。最適化には上田〔1980〕が作成した直接探索プログラムを用いる。ただし、地形パターン関数は、 $y = 0$ ， $1/4$ ， $2/4$ ， $3/4$ ， 1 の 5 点での値を与えて、他の部分は直線で内挿するという

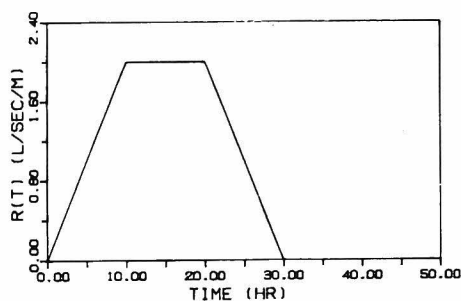


図 3.5 INPUT 2

数値実験は次の手順で行なう。

(i) 全ての河道区分の流れを逐一追跡して、河道網下流端の流出量を求める。以下で、QNET という記号はこの方法を表わす。

(ii) 前項で述べたように系を線形と仮定して得られる地形パターン関数と、 $\alpha^* = \alpha/L$ として得られる α^* を用いて、単一方程式系(5)~(7)式で流出流量を求める。ただし、流れを追跡するときは $m =$

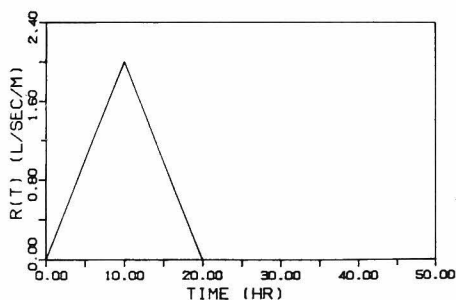


図 3.4 INPUT 1

方法をとる。これは少し粗すぎるようにも思えるが、結果はこれでも十分である。この方法をSUITと表わす。

(iv) (iii)で最適化した地形パターン関数と α^* とを用いて、INPUT 2 に対して単一方程式系(5)~(7)式で流出量を求める。この方法を *SUIT と表わす。

複雑になるのを避けるために、図 3.8
 の河道網のうち番号 21 と番号 25 の河
 道網についてのみ結果を例す。図 3.6 は、
 INPUT 1 に対する番号 21 と番号
 25 の河道網での QNET による流出流
 量を示している。番号 25 の河道網の方
 が集中度が高いことを反映して、流出が
 急激であることがわかる。図 3.7 は、
 INPUT 1 に対する番号 21 の河道網
 の QNET, QPAT, SUIT による
 流出流量を示す。前述したように最適化
 する地形パターン関数を可成り粗くとったに

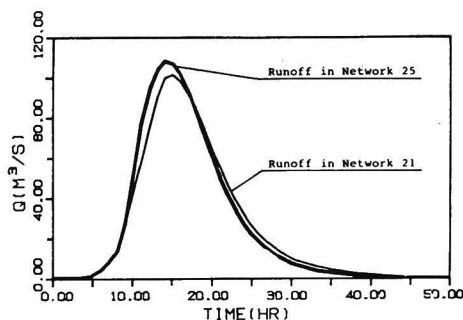


図 3.6 番号 21 と番号 25 の
 河道網の INPUT 1
 に対する流量流出の比
 較

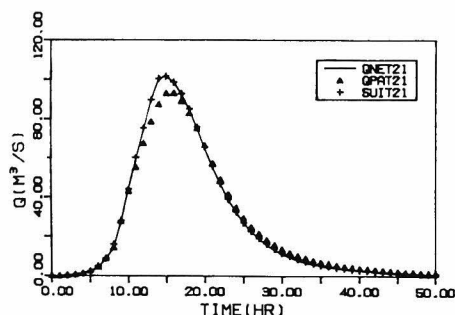


図 3.7 QNET, QPAT, SUIT
 による番号 21 の河道網の
 INPUT 1 による流出流
 量の比較

も拘らず、SUIT による流出流量は
 QNET による流出流量をよく再現し
 ている。一方、系の非線形性のために
 QPAT による流出流量は、QNET
 によるそれとは少し異なっている。図
 3.8 は、番号 25 の河道網の場合で、
 いずれの方法でもほとんど同一の流出
 となっている。これは、番号 25 の河
 道網がほとんど放射状に近くて、3.1
 で述べた議論が成立することによるもの
 である。この図からわかるように、河

道網が 3.1 で定義した通りの放射状河道網でなくても、それに近ければ 3.1 で展開した議
 論が成立し、かつ、図 3.7 とあわせて考えると、河道網が放射状に近いといえない場合で
 も、地形パターン関数を適当に決定することによって、単一方程式系(5)~(7)式で河道網系
 が統合的に表現できることがわかる。

しかしながら、図 3.7、図 3.8 の SUIT による計算はいずれも最適化したもの、すな
 わち合うように定数を決めたものである。そこで、他の横流入、INPUT 2 に対する流
 出流量を求めて検討する。この場合、(4)で述べたように、INPUT 1 による流出流量を

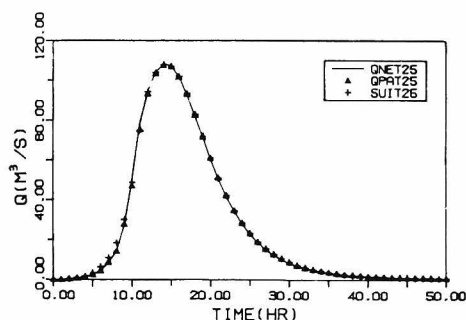


図 3.8 QNET, QPAT, SUIT
による番号 25 の河道網の
INPUT 1 による流出流
量の比較

適合度を示している。

他の数値実験結果ともあわせて以上の結果から次のような結論が得られる。地形パターン関数と α^* とを適当に決定すれば、単一方程式系(5)~(7)式によって各河道区分の流れを逐一追跡する場合とほとんど同じ流出量が算出される。また、このとき決定される地形パターン関数と α^* とは入力によらず河

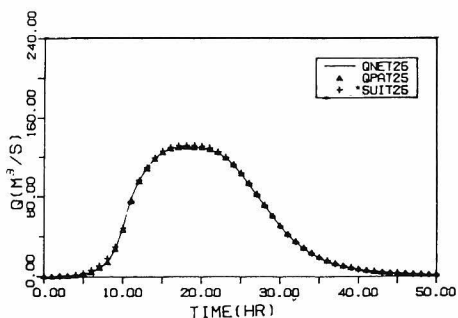


図 3.10 QNET, QPAT, *SUIT
による番号 25 の河道網の
INPUT 2 に対する流出流
量の比較

用いて最適化した地形パターン関数と α^* とを用い、INPUT 2に対してはこれらを固定する。結果を図 3.9、図 3.10 に示す。INPUT 1 による流出を用いて同定された地形パターン関数と α^* を用いて計算した流量は、いずれの場合でも、QNETによる流出量によく一致し、特に番号 21 の河道網での流出流量(図 3.9)では、やはり、先に同定した地形パターン関数と α^* を用いた流出計算 *SUIT の方が、QPATによるそれよりも良い

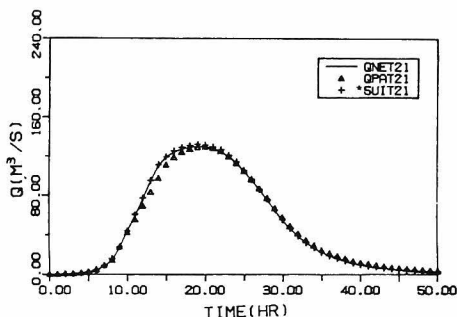


図 3.9 QNET, QPAT, *SUIT
による番号 21 の河道網の
INPUT 2 に対する流出流
量の比較

道網固有の定数とみてよい。

結局、各河道区分の流れが指数法則Kinematic wave式でモデル化され、そのKinematic 定数、河道区分への横流入強度 $r(t)$ が空間的に一様である場合には、横流入から河道網下流端への変換は、地形パターン関数を導入したKinematic waveモデルで統合的に表現できることが示された。このモデルは、流れの伝播過程の非線形性を考慮しており、しかも、単一の方程式系で河道網による複雑な集水過程を統合的に表現するという特徴をもっている。もちろん、Kinematic 定数や河道区分への横流入強度が空間的に一様であると考えなければならないので、河道網内での抵抗特性の変化や横流入強度の空間的変動を考慮することはできない。そうした場合は、やはり各河道区分の流れを逐一追跡していかざるを得ないであろう。

第4節 要 約

本章では、河道網系のモデル化を、要素に分割する方法と統合的に表現する方法との対照的な2つの方法で考察した。

要素に分割する方法とは、河道網を河道区分に分割し、各河道区分の流れを逐一追跡していくもので、いわゆる流域分割法である。この方法を手計算で実行するのは困難で計算機の利用は避けられないので、計算機による河道流の追跡構造を与えるという形でこの方法を整理した。また、計算機を利用する際、記憶容量の制約が問題となることが多いので、それを可能な限り節約する方策を与えておいた。

河道網系の統合的表現としては、地形パターン関数を導入したKinematic Waveモデルを考え、河道流を逐一追跡していく方法による結果と比較することによって、その妥当性を示した。この表現は、指数法則Kinematic wave式による河道流のモデル化と関連して得られたものであり、Meyerのlag-routingに代表される経験的直観によるものと異なって根拠が明確であり、流れの伝播過程の非線形性を考慮するものである。

参 考 文 献

- 石原藤次郎・高棹琢馬・瀬能邦雄(1969): 河道配列の統計測に関する基礎的研究, 京大防災研究所年報, 第12号, pp. 345-365.
- 石原安雄・小葉竹重機(1974): 小流域と大流域からの流出の相互関係, 京大防災研究所年報, 第17号B, pp. 471-478.
- 石原安雄・小葉竹重機(1975): 洪水ハイドログラフの形成過程に関する研究, 京大防災研究所年報, 第18号B, pp. 425-435.
- 上田光三郎(1980): 不等号制約条件下の多変数非線形関数の最大値の直接探索法, 京都大学大型計算機センタ利用の手引き—プログラムライブラリ編, pp. 71-78.
- 上田年比古(1961): 降雨流出に関する基礎的研究, 九州大学博士論文.
- 岡本芳美(1980): 山地洪水の数値モデル化における土地分類効果の導入について, 第24回水理講演会論文集, pp. 397-404.
- 高棹琢馬(1967): 流出過程におよぼす河道の効果, 水文学に関するシンポジウム.
- 高棹琢馬・椎葉充晴(1976): 河川流域の地形構造を考慮した出水系モデルに関する研究, 土木学会論文報告集, 第248号, pp. 69-82.
- 高棹琢馬・池淵周一・椎葉充晴(1977): 河道網構造を考慮した河川流域の出水解析法に関する研究, 京大防災研究所年報, 第20号B, pp. 185-199.
- 高棹琢馬・椎葉充晴(1981): Kinematic wave法への集水効果の導入, 京大防災研究所年報, 第24号B-2, pp. 159-170.
- 立神弘洋(1955): 洪水流出の新解析法.
- 藤田睦博(1975): 流域地形構造とその統計則に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第234号.
- 山口高志・松原重昭・山守 隆(1972): 都市における降雨流出調査(2)—修正R.R.L.法による流出推定, 土木技術資料, 14-11, pp. 570-575.
- Chow, V. T. (1964): Handbook of Applied Hydrology, McGraw-Hill Book Company.
- Ishihara, T., Iwasa, Y. and Takasao, T. (1967): Stochastic Study of Channel Distribution in River Basin, Proc. IHS.

- Ishihara, T. and Takasao, T. (1971): A Suggested Approach to Flood Peak Runoff Process in Channel Distribution System, Proc. U.S.-Japan By-Lateral Seminar in Hydrology.
- Linsley, R. K., Kohler, M. A., and Paulhus, J. L. H. (1949): Applied Hydrology, McGraw-Hill Book Company.
- Terstriep, M. L. and Stall, J. B. (1969): Urban Runoff by Road Res. Lab. Method, Proceedings of ASCE, 98HY10. pp. 1809-1834.

第5章 降雨・場・定数・流れのモデルの集中化

第1節 概 説

前章まで、Kinematic wave 法による流出系のモデル化を議論してきた。本章では、Kinematic wave法の集中化を議論する。ただし、Kinematic wave 法といっても、指数法則Kinematic wave法に限定する。

本章では集中化という用語を広い意味で用いる。たとえば、降雨や場の特性は空間的に変動するのが普通であるが、これらのある面積スケールで平均化することも集中化に含める。また、Kinematic wave法では斜面や河道網などの場のモデルを必要とするが、この場のモデルを簡略化したり統合したりすることも集中化に含める。これらの平均化や簡略化・統合の結果得られるモデルもやはり Kinematic waveモデルであり、流れを記述する式は空間座標を独立変数として含む分布型のモデルである。

これに対して、流れを記述する式を積分して、空間座標を削除し、結果として得られるモデルが集中型モデルになるようにすることも考える。集中化という用語は狭い意味ではこの場合に用いられるのであるが、いずれにしても、モデルを簡約にするという点では共通しているので、本章でまとめて議論する。

モデルを簡約にすると誤差が増大するのが普通である。したがって、誤差の増大を抑えるような簡約化の方法を議論すること、および簡約化による誤差の増大の構造を議論しておくことが必要である。本章では、このような観点から集中化問題を議論する。第2節では、空間的に変動する降雨を面積的に平均化するときの誤差が、降雨の空間的変動の程度と場の特性とどのような関係にあるかを検討する。第3節では、場および定数の集中化法と集中化による誤差を検討する。第4節では、河道網構造ごとの集中化を考え、そのために河道網構造の識別指標を提示する。第5節では、定常時水面形状を区分的に適用して、流れのモデル自体の集中化を議論する。

第 2 節 降雨の空間的分布が出水に及ぼす影響

2.1 基礎仮定

降雨は空間的に分布するが、流出計算を簡単にするために、面積降雨に変換されることが多い。しかし、降雨の空間的分布の程度が大きいと、この平均化操作は大きな誤差をもたらす可能性がある。本節では、降雨の空間的分布が出水に及ぼす影響を分析する。

本節で展開する議論が基礎とする仮定は以下の通りである。

i) 流域内には多数の斜面が存在するが、これらは全て同一の物理的性質を持つとする。河道系の影響は無視できるとする。したがって、全流域からの流出は個々の斜面からの流出の和である。

ii) 斜面系は、次のような指数法則の Kinematic wave モデルで表わされる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1a)$$

$$q = \alpha h^m \quad (1b)$$

$$y(t) = q_{x=1} \quad (1c)$$

ただし、 h は水深、 q は単位幅当りの流量、 α と m は定数である。空間座標 x は、 $x = 1$ が斜面下流端に対応するように無次元化してあるので、 $x = 1$ における q の値、すなわち $y(t)$ は流出高を表わす。

iii) 降雨強度 r は、個々の斜面内では空間的に一様であるが、異なる斜面では異なる値をとるものとし、

$$r = \xi \bar{r}(t) \quad (2)$$

とする。ただし、 $\bar{r}(t)$ は面積平均降雨強度であり、 ξ は斜面ごとに異なる係数である。 ξ の空間的平均値は 1 である。

iv) 面積平均降雨強度 $\bar{r}(t)$ の時間的配分のパターンは、

$$\bar{r}(t) = \frac{R}{t_r} v_0 \left(\frac{t}{t_r} \right) \quad (3)$$

によって与えられるとする。ここに、 R は総降雨量、 t_r は降雨期間、 $v_0(t)$ は

$$\left. \begin{aligned} v_o(t) &= 0, \quad t < 0 \quad \text{または} \quad t > 1 \\ \int_0^1 v_o(t) dt &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

であるような関数である。

仮定 iii) から，関数 $F(\xi^*)$ を

$$F(\xi^*) = (2) \text{式の係数 } \xi \text{ が } \xi \leq \xi^* \text{ となる斜面の} \\ \text{面積が全流域面積に占める割合} \quad (5)$$

と定義すると， $F(\xi^*)$ は確率論における分布関数と同一の性質を持つ。この関数を用いると，全流域からの流出高 $Y(t)$ は

$$Y(t) = \int_0^\infty y_\xi(t) dF(\xi) \quad (6)$$

と表わされる。ただし， $y_\xi(t)$ は，降雨強度が $\xi \bar{r}(t)$ で与えられる斜面の流出高である。一方，面積平均降雨による全流域からの流出高 $\bar{Y}(t)$ は，

$$\bar{Y}(t) = y_1(t) \quad (7)$$

で与えられる。

本節の目的は， $Y(t)$ と $\bar{Y}(t)$ の差が流域の特性，降雨の分布特性とどのような関係にあるかを明らかにすることにある。高棹・椎葉・久保〔1975〕は，第2章で述べたインパルス応答関数を用いた線形化手法とスペクトル解析によってこの問題を取扱い，空間的に分布した降雨による出水が，空間的に一様とした降雨による出水より急激であることを示し， $Y(t)$ と $\bar{Y}(t)$ との差と流域特性，降雨の空間的分布の程度との関係を表わす経験式を導いている。本節でも同様の結果を，より厳密な方法で導く。

2.2 降雨の空間的分布の影響の分析

最初に，空間的に分布した降雨による出水の方が，空間的に一様とした降雨による出水よりも“早い”ことを示す。

降雨強度が $\xi \bar{r}(t)$ である斜面での水深，流量を h_ξ, q_ξ と表わすことにし， \tilde{h}, \tilde{q} を

$$\left. \begin{aligned} \tilde{h} &= \int_0^\infty h_\xi dF(\xi) \\ \tilde{q} &= \int_0^\infty q_\xi dF(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

と定義することにする。

$$Y(t) = \tilde{q}_{x=1} \quad (9)$$

であることに注意する。(1a)式より，

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} = \bar{r}(t) \quad (10)$$

を得る。これは，空間的に一様とした降雨のときの連続方程式

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \bar{r}(t) \quad (11)$$

と同一である。しかし，流量と流積の関係式が両者では異なり，空間的に一様な降雨に対しては

$$\bar{q} = \alpha \bar{h}^m \quad (12)$$

であるのに対し，空間的に分布した降雨に対しては，

$$\tilde{q} = \int_0^\infty q_\xi dF(\xi) = \alpha \int_0^\infty h_\xi^m dF(\xi) \quad (13)$$

となる。右辺を \bar{h} の関数として表わすことは一般には不可能である。しかし， $m \geq 1$ として，確率論における Jensen の不等式を用いると

$$\int_0^\infty h_\xi^m dF(\xi) \geq \left[\int_0^\infty h_\xi dF(\xi) \right]^m$$

を得るから，(13)式を

$$\widetilde{z} = \widetilde{\alpha} \widetilde{h}^m \quad (14)$$

の形にかくと、 $\widetilde{\alpha}$ は

$$\widetilde{\alpha} \geq \alpha \quad (15)$$

を満たすことがわかる。これは、空間的に分布した降雨による出水が、一様な降雨による出水よりも“早くなる”ことを意味する。

これを具体的に説明するために、時刻0にインパルス降雨がある場合を考えよう。(2)式と同様に、インパルス強度 k は、斜面ごとに異なるものとし、

$$k = \xi \bar{k} \quad (16)$$

とする。ただし、 \bar{k} はインパルス強度の空間平均値、 ξ は、空間平均が1の係数である。インパルス強度 $\xi \bar{k}$ による流出高 $y_{\xi}(t)$ は2章(39)、(40)式より、

$$\begin{aligned} y_{\xi}(t) &= \alpha (\xi \bar{k})^m & 0 < t < t_{\xi \bar{k}} \\ y_{\xi}(t) &= \alpha (\alpha m t)^{m/(1-m)} & t > t_{\xi \bar{k}} \end{aligned} \quad (17)$$

で与えられる。ただし、

$$t_{\xi \bar{k}} = 1/(\alpha m (\xi \bar{k})^{m-1}) \quad (18)$$

である。これより、

$$0 < \lambda < 1/(m-1) \quad (19)$$

である任意の λ に対して、 $y_{\xi}(t)$ の原点回りの入次モーメントを求めると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^{\lambda} y_{\xi}(t) dt &= \xi^{1-\lambda(m-1)} \frac{\alpha (\alpha m)^{-\lambda-1-\lambda(m-1)}}{(\lambda+1)(\lambda+1-\lambda m)} \\ &= \xi^{1-\lambda(m-1)} \int_0^{\infty} t^{\lambda} y_1(t) dt \end{aligned}$$

を得るから、Jensen の不等式を用いて、

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} t^{\lambda} Y(t) dt &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} t^{\lambda} y_{\xi}(t) dt \right] dF(\xi) \\
&= \int_0^{\infty} \xi^{1-\lambda(m-1)} dF(\xi) \int_0^{\infty} t^{\lambda} y_1(t) dt \\
&\leq \left[\int_0^{\infty} \xi dF(\xi) \right]^{1-\lambda(m-1)} \cdot \int_0^{\infty} t^{\lambda} y_1(t) dt \\
&= \int_0^{\infty} t^{\lambda} \bar{Y}(t) dt \quad (20)
\end{aligned}$$

を得る。すなわち，空間的に変動する降雨による流出と空間的に一様な降雨による流出の原点回りの λ 次モーメントを比較すると，前者の方が小さい。したがって，前者の方がより早い時刻に集中していることになる。

この事実から，空間的に変動する降雨による流出の方が，空間的に一様な降雨による流出よりも大きいピーク流量を持つと推測することができるようであるが，後で例を示すように，必ずしもこの推測は正しくない。

次に，空間的に変動する降雨による流出 $Y(t)$ と空間的に一様な降雨による流出 $\bar{Y}(t)$ との差を定性的に検討しよう。 $Y(t)$ は，次の方程式系から求められることに注意する。

$$\frac{\partial h_{\xi}}{\partial t} + \frac{\partial q_{\xi}}{\partial x} = \xi \frac{R}{t_r} v_0 \left(\frac{t}{t_r} \right) \quad (21)$$

$$q_{\xi} = \alpha h_{\xi}^m \quad (22)$$

$$y_{\xi}(t) = q_{\xi} \Big|_{x=1} \quad (23)$$

$$Y(t) = \int_0^{\infty} y_{\xi}(t) dF(\xi) \quad (24)$$

以後の議論を簡明にするために，

$$q^0 = \alpha R^m \quad (25)$$

$$t^0 = 1 / (\alpha R^{m-1}) \quad (26)$$

とおき，無次元量 t^* ， h_ξ^* ， q_ξ^* ， y_ξ^* ， Y^* を

$$\left. \begin{aligned} t^* &= t / t^0 \\ h_\xi^* &= h_\xi / R \\ q_\xi^* &= q_\xi / q^0 \\ y_\xi^* &= y_\xi / q^0 \\ Y^* &= Y / q^0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

と定める。そうすると，方程式系(21)～(24)は，

$$\frac{\partial h_\xi^*}{\partial t^*} + \frac{\partial q_\xi^*}{\partial x} = \xi u v^0 (u t^*) \quad (28)$$

$$q_\xi^* = h_\xi^{*m} \quad (29)$$

$$y_\xi^* = q_\xi^* \big|_{x=1} \quad (30)$$

$$Y^* = \int_0^\infty y_\xi^* dF(\xi) \quad (31)$$

と書きなおされる。ここに， u は

$$u = t^0 / t_r \quad (32)$$

なる無次元量である。

大雑把に言って， t^0 は系の応答時間を表わすと考えてよいから， u は入力降雨の期間に相対的な系の応答時間である。

空間的に一様な降雨による流出 $Y(t)$ に対しても，無次元量

$$\bar{Y}^* = \bar{Y} / q^0 \quad (33)$$

を考える。明らかに

$$\bar{Y}^* = y_1^* \quad (34)$$

である。

(28)～(31)式および(34)式から， ξ がその平均値1の回りに集中しているほど，また系の相対的な応答時間 u が小さいほど， $Y(t)$ と $\bar{Y}(t)$ の差は小さくなるものと推測される。後者の理由は， u が小さいほど入力降雨の時間的変動が支配的になることである。

この推論を実証するために数値実験を行なった。実験条件は次の通りである。

i) (27)，(28)式中のパラメタ m, u : $m=2, u=0.2$,

$$0.4, \quad 0.6, \quad 0.8, \quad 1.0 \quad (35)$$

ii) 降雨の時間変動 $v_0(t)$:

$$\left. \begin{aligned} v_0(t) &= 0 & t < 0 \quad \text{または} \quad t > 0 \\ v_0(t) &= 4t & 0 < t < 1/2 \\ v_0(t) &= 4(1-t) & 1/2 < t < 1 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

iii) ξ の分布関数 $F(\xi)$:

$$\frac{dF}{d\xi} = \frac{1}{c \beta(a, b)} \left(\frac{\xi}{c}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{\xi}{c}\right)^{b-1} I_{(0, c)}(\xi) \quad (37)$$

ただし， a, b は正値をとるパラメタで， $\beta(a, b)$ はベータ関数， $I_{(0, c)}(\xi)$ は区間 $(0, c)$ の定義関数， c は， ξ の平均値が1となるように

$$c = 1 + b/a \quad (38)$$

とし，

$$a, b = 1, 2, 4, 8, 16 \quad (39)$$

とする。

降雨の空間変動を表わす分布形として(37)式のようなベータ分布を考えるのは，パラメタ a, b の値を変化させることにより分布の歪みを変化させることができるからである。図

2.1 (a)は、パラメタが $a=2$ ， $b=8$ ， $c=5$ のときのベータ分布の確率密度関数を，図2.2 (a)は、パラメタが $a=8$ ， $b=2$ ， $c=1.25$ のときのベータ分布の確率密度関数を示している。図2.1 (a)の例では分布は右に歪み，図2.2 (a)の例では左に歪んでいる。

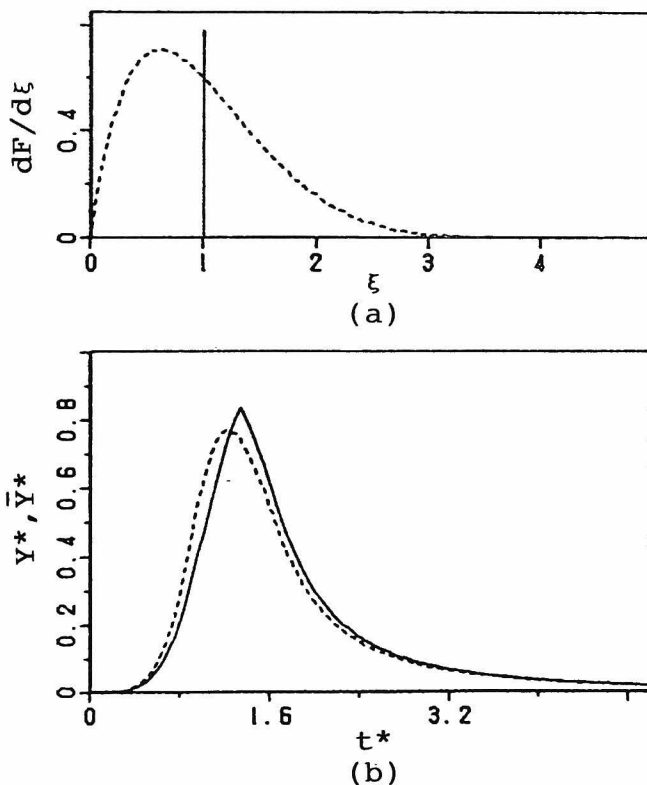


図 2.1 降雨の空間的分布とその流出への影響の例

図 2.1 (b)，図 2.2 (b)は， $u=0.6$ のときにそれぞれ上述の降雨の空間変動に対する無次元化流量 Y^* を破線で，空間的に一樣な降雨に対する無次元化流量 \bar{Y}^* を実線で示している。これらの例から，空間的に変動する降雨による流出の方が空間的に一樣な降雨による流出より早いこと，ピーク流量は前者の方が大きくなるとは限らないことがわかる。図 2.2 (b)では，図 2.1 (a)に比べて，降雨の空間変動による影響が顕著ではないが，それは分散の差異によるものと考えられる。実際，図 2.1 (a)の分布の分散は 0.3636 であるのに

対し，図 2.2 (a) の分布の分散は 0.0227 である。

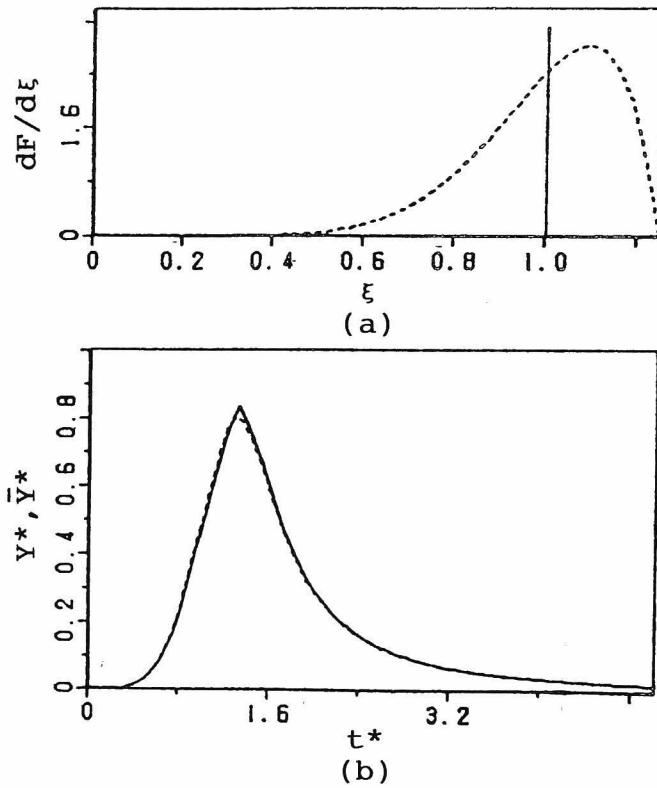


図 2.2 降雨の空間的分布とその流出への影響の例

図 2.3 は， $Y(t)$ と $\bar{Y}(t)$ との差の評価値

$$\epsilon = \sup_{t > 0} |Y(t) - \bar{Y}(t)| / q^0 \quad (40)$$

と降雨の空間変動分布の標準偏差

$$\sigma = \sqrt{\frac{b}{a(a+b+1)}} \quad (41)$$

との関係を系の相対的な応答時間 u の値ごとに図示したもので，図中の直線は表 2.1 に示

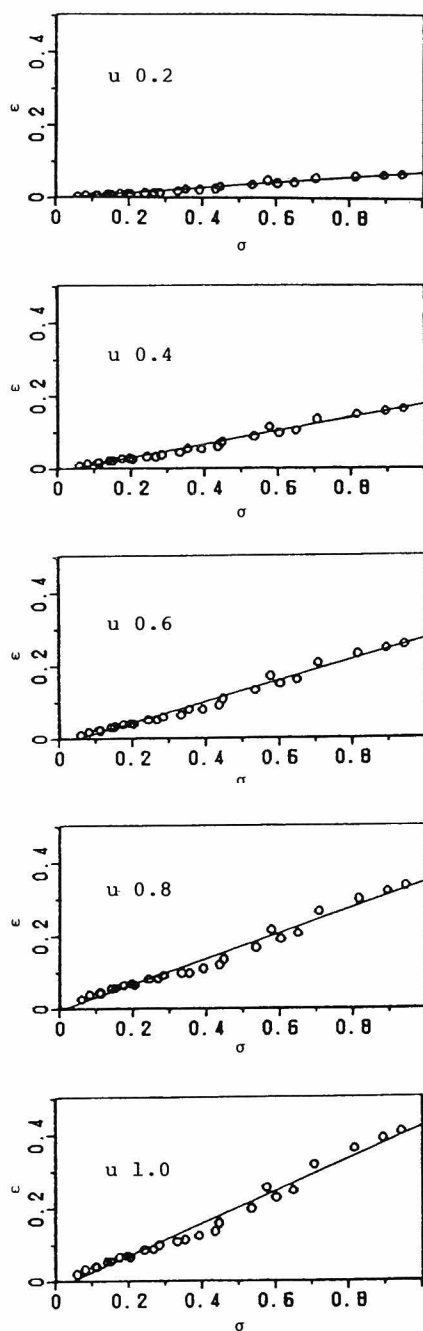


図 2.3 降雨の空間変動の標準偏差 σ とその影響の評価値 ϵ との関係

す係数値を持つ回帰直線である。
これらの結果より次の結論が得られる。

i) 空間的に変動する降雨による流出 $Y(t)$ と空間的に一様な降雨による流出 $\bar{Y}(t)$ の差を(40)式で評価すると、その差 ϵ は空間変動の標準偏差 σ とともに増大する。

ii) 数値実験の対象としたパラメタ値の範囲では、 ϵ の変動は σ の線形回帰式でよく説明される。注意深くみると、降雨の空間変動が右に歪んでいるほど ϵ は増加するが、その影響はほとんど無視でき、分布の歪みの影響は標準偏差によるそれと比し無視してよい。

表 2.1 ε の σ に対する回帰式の係数と相関係数

u	Slope	Interception	Correlation
0.2	0.07508	-0.00356	0.98995
0.4	0.18486	-0.00899	0.98997
0.6	0.28701	-0.01618	0.99019
0.8	0.35110	-0.00533	0.98734
1.0	0.44119	-0.02184	0.98860

2.3 結 論

本節では、河道系の効果を無視して斜面系の流れが指数法則の Kinematic wave モデルで表わされるとしたときに、空間的に変動する降雨による流出と空間的に一様な降雨による流出の差を理論的・数値実験的に検討した。

空間的に変動する降雨による流出は、一様な降雨による流出よりも早い時間に集中することを理論的に示した。また、数値実験によって、これらの流出の差を、2つのパラメタ、すなわち、降雨の継続時間に相対的な系の応答時間 u と、降雨の空間変動の標準偏差 σ とを用いて表現する経験式（表 2.1）を導いた。降雨の空間変動の分布は、対象とする流域の面積が増大するほど大きな標準偏差を持つと推測されるから、本節の議論は降雨を一様として計算するときの精度と流域面積の関係を検討する基礎になるものと考えられる。

第 3 節 Kinematic wave 法における場および定数の集中化

3.1 概 説

本節では、斜面および河道の雨水の流れが指数法則 Kinematic wave 式でモデル化されるとして、流域場モデルの構成法、流域場モデルおよび定数の集中化法を提示する。

すでに第 3 章で議論したように、流域斜面に浸透性の高い表土層（A 層）がある場合には、斜面での流出過程を単純な指数法則 Kinematic wave 式でモデル化することには無理があるが、A 層が薄くて中間流出の効果が無視できる場合や、A 層があっても A 層上の表面流出が卓越する大出水の場合には、斜面流出過程を指数法則 Kinematic wave

式でモデル化してもよい。本節ではこのような場合を考える。

本節で考える流域場モデルの構成法は基本的には流域分割法である。流域分割法ではどの程度まで細かく分割するかという問題が常に生じる。これは、後述するように流れのモデルの定数が流域分割の精粗の影響を受けること、および計算量が流域分割の精粗に依存することによる。このため、流域間で流れのモデルの定数を比較・参照するには流域分割スケールを統一しておくことが必要であるが、計算量を考えると流域面積が大きくなるほど流域分割を粗くした方がよいというジレンマが生じるのである。

この問題に対処するため、ここでは次のように考える。まず、ある統一的な流域分割スケールを考えて、流域場モデルと定数を想定し、流域面積の大きさに応じてその集中化を考え、実際の流出計算は集中化された流域場モデルと定数を用いて実行する。この流域場モデルおよび定数の集中化方式が明確であるならば、元のモデル中に未知定数 θ があるとき、集中化されたモデルの定数は θ のある関数 $\varphi(\theta)$ の形に表わされるから、集中化されたモデルを用いて $\varphi(\theta)$ を同定すれば θ を推定できることになる。よって、本節では、ある統一的な流域分割スケールが与えられているとして、流域場モデルと定数の集中化を考える。

本節で考える流出モデルは、末石〔1955, 1963〕の等価粗度法の一般化ないし改良であるので、3.2でその概略と問題点を整理する。3.3で流域場モデルと定数の集中化方式を提示し、3.4で実流域での数値シミュレーションによってその有効性を確認する。

3.2 等価粗度法の概略とその問題点

3.2.1 等価粗度法の概略

等価粗度法では、流域を斜面域と河道域に分けて、それぞれ矩形平面と直線で表わして場のモデルを作る。この際の流域分割の統一的基準はなく、計算量・流域の特性等を考え、適当な縮尺の地形図により分割する。通常、河道区分の両側に大きさの等しい矩形平面を2つ配置し、その河道区分の集水面積を F 、河道区分長を L とするとき、斜面長 B を、

$$B = F / (2L) \quad (1)$$

と定める。ただし、河道区分長 L 、斜面長 B はいずれも水平面への投影長である。本節では、河道区分長、斜面長はいずれもこの水平面への投影長の形で考えることにする。

斜面流の式は

$$q = \alpha_0 h^{m_0}, \quad \partial q / \partial x + \partial h / \partial t = r_e \cos \theta_0 \quad (2)$$

とする。ここに、 q は斜面単位幅あたりの流量、 h は斜面流の水深、 r_e は有効降雨強度、 θ_0 は斜面勾配、 x は斜面に沿う距離、 t は時間である。 α_0, m_0 は定数であって、Manningの流速公式によって、

$$\alpha_0 = \sqrt{\sin \theta_0} / N, \quad m_0 = 5/3 \quad (3)$$

とする。ここに、 N は斜面等価粗度である。(2)式の x のかわりに、水平方向の距離座標を導入し、 $x \cos \theta_0$ 、 $h / \cos \theta_0$ 、 $\alpha_0 (\cos \theta_0)^{m_0}$ を改めて、 x 、 h 、 α_0 とかくと、(2)式は、

$$q = \alpha_0 h^{m_0}, \quad \partial q / \partial x + \partial h / \partial t = r_e \quad (4)$$

と変形される。

河道流の式は、

$$q = \alpha h^m, \quad \partial Q / \partial x + \partial A / \partial t = F r^* \cos \theta_c / L \quad (5)$$

とする。ここに、 Q は河道流量、 A は河道流の通水断面積、 θ_c は河道勾配、 x は河道に沿う距離、 t は時間である。 r^* は単位面積あたりの斜面流出強度であって、(4)式の解 q の $x=B$ での値を q_B と表わすと

$$r^* = q_B / B \quad (6)$$

で与えられる。また、 α 、 m は定数で、 m は通水断面積 A と径深 R との間に、

$$A R^{2/3} = K A^m \quad (7)$$

なる関係があるとしたときの右辺 A の指数、 α は、

$$\alpha = \sqrt{\sin \theta_c} \quad K / n$$

である。ただし、 n は河道の粗度係数である。斜面流の場合と同様に、 $X \cos \theta_c$ 、 $A / \cos \theta_c$ 、 $\alpha (\cos \theta_c)^m$ を改めて X 、 A 、 α とかくと、(5)式は

$$Q = \alpha A^m, \quad \partial Q / \partial x + \partial A / \partial t = F_r^* / L \quad (8)$$

と変形される。

以上が等価粗度法の概略である。以下、(4)式中の α_0, m_0 を斜面 Kinematic 定数、(8)式中の α, m を河道 Kinematic 定数とよぶ。

3.2.2 等価粗度法の問題点

等価粗度法で問題となるのは、流域分割の仕方と斜面等価粗度 N の決定である。

流域分割を粗くすると、(1)式で定める斜面長は増大し、支流が無視されていく。このとき、斜面等価粗度を未知定数として、観測流量に適合するように決定することになると、等価粗度値は斜面長増大と支流無視の影響を含むことになる。実際、特別に河道効果が無視でき、斜面特性が一樣である場合を考えると、Appendix A に示すように、斜面 Kinematic 定数 α_0 は斜面長 B に比例し、したがって等価粗度 N は斜面長 B に反比例する。斜面長が一樣でなくても、3.5 で示すように等価粗度 N は斜面長の平均値に反比例するといってよい。河道効果が無視できない場合には、さらに支流無視の影響を受けるわけである。

等価粗度値に斜面長増大と支流無視の影響を含ませる場合に、新しい等価粗度値をより細かく分割したモデルの諸定数から決定する問題は末石〔1963〕、豊国・渡辺〔1975〕が検討している。しかし、これらの検討では、斜面 Kinematic 定数 m_0 と河道 Kinematic 定数 m が一致しないために、新しく得られる等価粗度が降雨強度に依存することになっている。等価粗度は定数であるべきであって、入力である降雨強度に依存するのは好ましいことではない。

以上述べたように、従来の場のモデル化、特に(1)式で斜面長を決定する方法では、等価粗度値は流域分割の精粗の影響を受け、しかも理論的には降雨強度の影響を受けることになる。これらは、従来の取扱い方では等価粗度の物理的意義が極めてあいまいであることを意味している。

3.3 流域場モデルの構成とその集中化

3.3.1 統一的流域分割基準

Appendix Aに示しているように、斜面 Kinematic 定数 α_0 と斜面長 B の効果は等価である。したがって、 α_0 の物理的意義を確保し、異なる流域間で α_0 の値を比較・参照できるようにするには、斜面長の定義を明確にする必要がある。斜面長は、分水界から斜面の最急勾配方向へ降下して河道に至る距離であるから、河道の定義の問題に帰着する。計量地形学の分野でも、この河道あるいは河道の上流端点である水源の定義には未だ定説が無いようであるが(友杉[1976])、用いる地形図縮尺を固定し、地形図上で谷筋を上流のどこまでたどるかの作業的定義を与えておくのが実際的であると考えられる。

ここでは、このような作業的定義を具体的にどのようにするか議論はせず、河道表示の基準は与えられているものとして後の議論を展開する。

3.3.2 流域場モデルの構成

河道表示が与えられると、河道網にしたがって流域を流域単位群に分割することができる。流域単位網の構造にしたがって雨水流追跡の枠組みを決定する方法は、すでに第4章で述べた。

各流域単位は斜面要素と河道区分にわけてモデル化する。河道区分は河道区分長 L の直線で、斜面要素は流域単位内の平均斜面長 B を斜面長とする矩形平面でモデル化する。ただし、通常の等価粗度法のように斜面幅を河道区分長 L とするのではなく、(6)式によって単位面積あたりの斜面流出強度 r^* を算定して、河道区分単位距離あたりの横流入強度 $F r^* / L$ に変換することにする。ただし、 F は流域単位の面積である。

3.3.3 流域場モデルの集中化

流域単位網の構造は河道網構造と同一である。そこで、Horton-Strahler の位数系を用いて河道網の集中化操作を次のように定める。

河道網の集中化操作 … 位数1の河道区分を削除する。ただし、位数1の河道区分同士が合流しているときに限り、河道区分長が長い方を残す。

この集中化操作による新しい河道網に対応して、新しい流域単位網ができる。元の流域単位網を \mathcal{Q} と表わしたとき、新しい流域単位網を \mathcal{Q} の集中化流域単位網とよび $\hat{\mathcal{Q}}$ と表わす。この集中化操作は繰返し適用できる。 \mathcal{Q} を n 回集中化したものを $\hat{\mathcal{Q}}^n$ と表わす。 \mathcal{Q} 内の河道最大位数を $\text{ord}(\mathcal{Q})$ と表わすと、

$$\text{ord}(\hat{\Omega}^n) = \text{ord}(\hat{\Omega}) - n$$

であるから，集中化が可能な回数は $\text{ord}(\hat{\Omega}) - 1$ 回である。

以上の集中化操作の例を図 3.1 に示す。図 3.1 の(a)は元の流域単位網 Ω ，(b)は Ω の集中化流域単位網 $\hat{\Omega}$ である。図中，文字 B，L はそれぞれ，斜面要素，河道区分を表わし，集

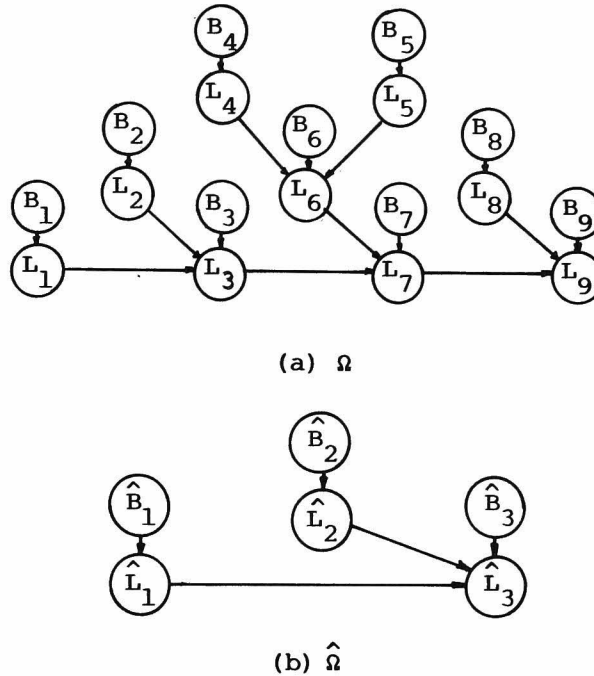


図 3.1 流域単位網の集中化の例

中化流域単位網のそれには，文字の上に記号 $\hat{\cdot}$ をつけている。また，B，L の添字は，第 4 章で述べた最適計算順序である。表 3.1 に，図 3.1 で示した Ω と $\hat{\Omega}$ における流域単位の

表 3.1 流域単位の対応 (図 3.1 に対応)

basin elements in Ω	basin element in $\hat{\Omega}$
F_1, F_2, F_3	\hat{F}_1
F_4, F_5, F_6	\hat{F}_2
F_7, F_8, F_9	\hat{F}_3

(Note) $F_i = (B_i, L_i)$, $\hat{F}_i = (\hat{B}_i, \hat{L}_i)$

対応を示している。ただし、 \mathcal{Q} 中，計算順位 i をもつ流域単位，すなわち斜面要素 B_i と河道区分 L_i の組 (B_i, L_i) を F_i と表わしている。同様に， (\hat{B}_i, \hat{L}_i) を \hat{F}_i と表わしている。図 3.1 にみられるように，集中化後の流域単位の計算順序は，元の流域単位網内のそれを保存している。すなわち，一般に言うと，「元の流域単位網 \mathcal{Q} ，集中化流域単位網 $\hat{\mathcal{Q}}$ 中の流域単位の個数をそれぞれ， $n(\mathcal{Q})$ ， $n(\hat{\mathcal{Q}})$ とするとき，

$$0 = J(0) < J(1) < \cdots < J(n(\hat{\mathcal{Q}})) = n(\mathcal{Q})$$

となる一連の整数 $J(0)$ ， $J(1)$ ， \cdots ， $J(n(\hat{\mathcal{Q}}))$ が存在して， $\hat{\mathcal{Q}}$ 内の流域単位 \hat{F}_i に対応する \mathcal{Q} 中の流域単位群は $\{F_{J(i-1)+1}, F_{J(i-1)+2}, \cdots, F_{J(i)}\}$ である。」という関係が成立つ。

3.3.4 場の定数の集中化

以後，流域単位 F_i の面積，河道区分 L_i の河道区分長，斜面要素 B_i の斜面長をそれぞれ F_i ， L_i ， B_i と表わす。すなわち，各要素を表わす記号をその寸法を表わす記号に転用する。こうしても混乱は生じないであろう。集中化後の各要素の寸法についても同じ表記法を用いる。

集中化流域単位の面積 \hat{F}_i は，全流出量が等してなるように，

$$\hat{F}_i = \sum_{J(i-1) < k \leq J(i)} F_k$$

とする。図 3.1 の例では，たとえば， $\hat{F}_1 = F_1 + F_2 + F_3$ である。

集中化河道区分の河道区分長 \hat{L}_i は，流域単位群 $\{F_k : J(i-1) < k \leq J(i)\}$ 内の主河道長に等しいとする。たとえば，図 3.1 の例では， $\hat{L}_1 = \max(L_1, L_2) + L_3$ ， $\hat{L}_3 = L_7 + L_9$ 等とする。

集中化斜面の斜面長 \hat{B}_i は，斜面要素群 $\{B_k : J(i-1) < k \leq J(i)\}$ の各斜面長の面積平均値とする。すなわち，

$$\hat{B}_i = \sum_{J(i-1) < k \leq J(i)} F_k B_k / \hat{F}_i \quad (9)$$

とする。集中化斜面要素に対応する元の斜面要素群が同じ斜面長をもてば，集中化斜面要素の斜面長もそれと同じ値になるわけである。

3.4 流れの定数の集中化

3.4.1 流れの定数の集中化の方針

斜面および河道の流れの定数の集中化方式を述べる前に、その基本方針を述べておく。

通常の等価粗度法では、支流を無視する影響を斜面等価粗度係数の調整でカバーするものとするが、このように、河道流の効果を斜面流の効果に含ませたりせず、斜面の流れの定数と河道の流れの定数の集中化は互いに独立した形で考える。すなわち、次のように考える。

流域単位網内の流域単位 F_k を最下流流域単位とする \mathcal{Q} の部分流域単位網を \mathcal{Q}_k と表わす。同様に、 \hat{F}_k を最下流流域単位とする $\hat{\mathcal{Q}}$ の部分流域単位網を $\hat{\mathcal{Q}}_k$ と表わす。 $\hat{\mathcal{Q}}_k$ には $\mathcal{Q}_J(k)$ が対応する。河道の流れの定数の集中化を考える場合には斜面効果を無視し、斜面の流れの定数の集中化を考える場合には河道効果を無視して、各 k について $\hat{\mathcal{Q}}_k$ と $\mathcal{Q}_J(k)$ が等価になるようにする。

3.4.2 河道の流れの定数の集中化

河道流は(8)式によってモデル化されたとする。この場合、決定しなければならない定数は α と m であるが、後者は大体 1.45 位の値をとり(上田[1961])、一定としてもよい。それで、以下 Kinematic 定数 α の集中化を考えよう。すでに述べたように、斜面効果を無視して、 $\hat{\mathcal{Q}}$ 内の部分流域単位網 $\hat{\mathcal{Q}}_k$, $k = 1, 2, \dots, n(\hat{\mathcal{Q}})$ と、対応する元の部分流域単位網 $\mathcal{Q}_J(k)$ とができるだけ等価になるようにする。

上記の目的を念頭において、斜面効果を無視した場合の流域単位網 \mathcal{Q} の効果を陽に表現することを考えよう。すなわち、流域単位網 \mathcal{Q} を、有効降雨 r_e を入力とし、 \mathcal{Q} 下流端の河道流出流量を出力とするシステムとみなし、 \mathcal{Q} の入出力関係を表現することを考える。斜面効果を無視することにしたので、この場合には、(8)式右辺中の r^* は r_e に等しいことに注意する。(8)式は非線形であり、非線形の入出力関係を陽に表わすことは一般には困難である。それで、入力 r_e が一定値 r_0 をとったときの定常解から、定常時河道内流速を求め、これを固定して系を線形化し、その線形系に対して求まる単位インパルス応答関数 $h(t, r_0; \mathcal{Q})$ でシステム \mathcal{Q} の入出力関係を近似的に表現することを考える。

この単位インパルス応答関数 $h(t, r_0; \mathcal{Q})$ を用いて、集中化河道の Kinematic 定数 α を決定しよう。すなわち、

$n(\hat{\mathcal{Q}})$ 個の集中化部分流域単位網 $\hat{\mathcal{Q}}_k$ ($k=1, 2, \dots, n(\hat{\mathcal{Q}})$)の単位インパルス応答 $h(t, r_0 : \hat{\mathcal{Q}}_k)$ と、それぞれ対応する元の部分流域単位網の単位インパルス応答 $h(t, r_0 : \mathcal{Q}_J(k))$ とができるだけ等価になるように河道のKinematic 定数 α を決定する。その規準としては種々のものが考えられるが、計算の容易さ等を考慮して、単位インパルス応答の原点回りの1次モーメントが一致するという規準を採用する。単位インパルス応答は遅れ時間関係を表わすものであるから、これは遅れ時間の平均値が等しくなるようにすることを意味する。

この基準によると、集中化河道区分 \hat{L}_k ($k=1, 2, \dots, n(\hat{\mathcal{Q}})$)のKinematic 定数 $\hat{\alpha}_k$ は、

$$M(r_0 : \hat{\mathcal{Q}}_k) = M(r_0 : \mathcal{Q}_J(k)), \quad k=1, 2, \dots, n(\hat{\mathcal{Q}}) \quad (10)$$

を満足するように決定することになる。ただし、 $M(r_0 : \mathcal{Q})$ は、単位インパルス応答関数 $h(t, r_0 : \mathcal{Q})$ の原点回りの1次モーメントを表わし、Appendix B の(8)式によって算定される。Appendix B で示すように $M(r_0 : \mathcal{Q}) r_0^{(m-1)/m}$ は定常線形化に用いる r_0 の値に無関係であるから、(10)式両辺に $r_0^{(m-1)/m}$ を乗すると両辺とも r_0 に無関係になる。よって、(10)式で定める $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_{n(\hat{\mathcal{Q}})}$ は、定常線形化に用いる r_0 の値には依存しない定数となる。それで、特に $r_0 = 1$ とおいてもよい。

$\hat{\alpha}_k$ の算定式を書き下しておこう。河道区分 \hat{L}_k の位数が1であれば、

$$\hat{\alpha}_k = [\{m/(m+1)\} \hat{L}_k \hat{F}_k^{1/m} / M(1 : \mathcal{Q}_J(k))]^m$$

となる。河道区分 \hat{L}_k の位数が2以上のときは、 \hat{L}_k に流入する2つの河道区分を \hat{L}_{k_1} , \hat{L}_{k_2} とすると、

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k &= [M(1 : \mathcal{Q}_{J(k_1)}) + M(1 : \mathcal{Q}_{J(k_2)}) + (m\hat{L}_k / \hat{F}_k) \\ &\quad \{ \hat{U}_k^{1/m} - (\hat{U}_k - \hat{F}_k)^{1/m} \} (\hat{U}_{k_1} + \hat{U}_{k_2}) + (m\hat{L}_k / \hat{F}_k) \\ &\quad [\hat{F}_k \hat{U}_k^{1/m} - (m/(m+1)) \{ \hat{U}_k^{(m+1)/m} - (\hat{U}_k - \hat{F}_k)^{(m+1)/m} \} \\ &\quad]]^m / \{ M(1 : \mathcal{Q}_J(k)) \}^m \end{aligned}$$

である。ただし、 \hat{U}_k は $\hat{\mathcal{Q}}_k$ の集水面積である。

3.4.3 斜面の流れの定数の集中化

斜面流は(4)式によってモデル化されるとする。この場合、決定しなければならない流れの定数は Kinematic 定数 α_o である。

3.4.1 で述べたように、河道効果を見捨て、集中化流域単位網 $\hat{\mathcal{Q}}$ の各部分流域単位網 $\hat{\mathcal{Q}}_k$, $k=1, 2, \dots, n(\hat{\mathcal{Q}})$ と対応する元の部分流域単位網 $\hat{\mathcal{Q}}_{J(k)}$ とができるだけ等価になるように Kinematic 定数 α_o を集中化する。

河道の場合と同様に、定常入力 r_o を用いて線形化したときの \mathcal{Q} の単位インパルス応答を $h_o(t, r_o; \mathcal{Q})$, その原点回りのモーメントを $M_o(r_o; \mathcal{Q})$ と表わし、モーメントが一致するように集中化斜面 \hat{B}_k の Kinematic 定数 $\hat{\alpha}_{ok}$ ($k=1, 2, \dots, n(\hat{\mathcal{Q}})$) を決定する。

$$M_o(r_o; \hat{\mathcal{Q}}_k) = M_o(r_o; \mathcal{Q}_{J(k)}), \quad k=1, 2, \dots, n(\hat{\mathcal{Q}})$$

Appendix B の(13)式に示す $M_o(r_o; \mathcal{Q})$ の計算式を用いると、上式より

$$\hat{\alpha}_{ok} = \hat{B}_k / \left(\sum_{J(k-1) < i \leq J(k)} F_i \cdot (B_i / \alpha_{oi})^{1/m_o} / F_k \right)^{m_o} \quad (11)$$

を得る。斜面 B_i の上流端から出発した雨水擾乱が下流端に伝播するのに要する時間は、 $r_o^{(m-1)/m_o} (B_i / \alpha_{oi})^{1/m_o}$ であるから、(11)式によって $\hat{\alpha}_{ok}$ を定めることは、斜面群 $\{B_i : J(k-1) < i \leq J(k)\}$ での伝播時間の面積平均が集中化斜面 \hat{B}_k の伝播時間に等しくなるように $\hat{\alpha}_{ok}$ を定めることになる。また、(11)式は、斜面群 $\{B_i : J(k-1) < i \leq J(k)\}$ の Kinematic 定数 α_{oi} のある種の平均値を与える式であり、特に、 $\{B_i : J(k-1) < k \leq J(k)\}$ で斜面特性値 α_{oi} , B_i が一様であれば、 $\hat{\alpha}_{ok}$ は元の α_{oi} に等しい。

3.5 実流域での数値実験による検討

3.5.1 モデル流域の概要

前項までの議論を数値的に検討するために、由良川上流荒倉流域をモデル流域としてとりあげる。同流域は、流域面積 15.9 km^2 の山間地流域であって、その地形諸量は、高棹・池淵・椎葉〔1977〕に一部記載されている。

以下では、5 万分の 1 の地形図での河道表示をもとに分割して作る流域単位網を基礎の

流域単位網として \mathcal{Q} で表わす。このときの流域単位数は105で最大位数は4である。したがって、3回集中化操作を施すことができる。基礎の流域単位網での斜面長は、河道区分の中央から左岸および右岸側の分水界に至る距離の平均値をとることとした。

3.5.2 場の集中化にともなう等価粗度の変化

等価粗度法の従来の方法では、場の集中化によって斜面長が増大し、その影響と支流無視の影響が等価粗度の値に含まれていくことを既に示した。ここでは、このうち、斜面長の増大が等価粗度値に及ぼす影響を数値的に示して、この指摘が正しいことを示す。議論を簡単にするため、河道効果を見捨てる。

場の集中化操作を j 回施したときの流域単位面積、河道区分長をそれぞれ \hat{F}_k^j, \hat{L}_k^j (k は計算順位)と表わすことにしよう。本節では斜面長を(9)式で集中化することを提案したが、ここでは従来の方法によって(1)式によって決定するものとしよう。すなわち、 \hat{F}_k^j 中の斜面要素の斜面長 \widetilde{B}_k^j を、

$$\widetilde{B}_k^j = \hat{F}_k^j / (2L_k^j)$$

と定めてみる。このときの斜面水平長の面積平均

$$E[\widetilde{B}^j] = \frac{n(\hat{\mathcal{Q}}^j)}{\sum_{k=1}^{\hat{\mathcal{Q}}^j} \hat{F}_k^j} \widetilde{B}_k^j / \frac{n(\hat{\mathcal{Q}}^j)}{\sum_{k=1}^{\hat{\mathcal{Q}}^j} \hat{F}_k^j}$$

を求め、

$$E[\widetilde{B}^0] / E[\widetilde{B}^j] = \frac{n(\mathcal{Q})}{\sum_{k=1}^{\mathcal{Q}} \hat{F}_k^0} \widetilde{B}_k^0 / \frac{n(\hat{\mathcal{Q}}^j)}{\sum_{k=1}^{\hat{\mathcal{Q}}^j} \hat{F}_k^j} \widetilde{B}_k^j \quad (12)$$

がどのように変動するかを図3.2中に示している。これより、従来の方法では、集中化回数 j が大きくなるにつれて、斜面長が増大する傾向にあることがわかる。

次に、斜面等価粗度が集中化とともにどのように変化するかを検討する。斜面勾配は一樣とし、斜面等価粗度も一樣と仮定する。集中化回数が j 回のときの斜面等価粗度を \widetilde{N}^j とかき、定常線形化単位インパルス応答の1次モーメント \widetilde{M}_0^j を求めるとAppendix Bの(13)式から、

$$\tilde{M}_0^j = m_0 / (m_0 + 1) r_0^{(1-m_0)/m_0} (\tilde{N}^j / C)^{1/m_0} \prod_{k=1}^n (\hat{\mathcal{Q}}^j) \hat{F}_k^j (\tilde{B}_k^j)^{1/m_0}$$

となる。ただし、 C は斜面勾配を θ_0 として

$$C = \sqrt{\sin \theta_0} (\cos \theta_0)^{5/3}$$

で定める定数である。ここで、

$$\tilde{M}_0^j = \tilde{M}_0^0$$

とおくと、

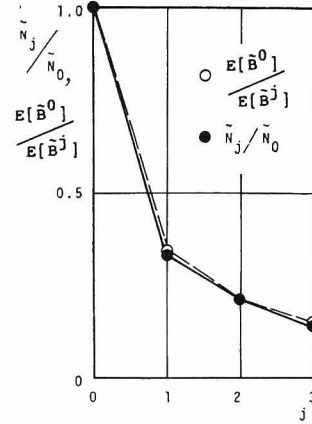


図 3.2 集中化による平均斜面長と等価粗度の変化

$$\tilde{N}^j / \tilde{N}^0 = \left\{ \prod_{k=1}^n \hat{F}_k^0 (\tilde{B}_k^0)^{1/m_0} / \prod_{k=1}^n \hat{F}_k^j (\tilde{B}_k^j)^{1/m_0} \right\} m_0 \quad (13)$$

となる。図 3.2 中に、 $\tilde{N}^j / \tilde{N}^0$ が集中化回数 j とともにどのように変化するかを示している。明らかに、集中化回数 j が大きくなるにつれ、斜面等価粗度も減少していくことがわかる。また、 $\tilde{N}^j / \tilde{N}^0$ の変化は $E[\tilde{B}^0] / E[\tilde{B}^j]$ の変化とほとんど一致している。(13)式右辺は、 $m_0 = 1$ とおいてみるとわかるように、斜面長のある種の重みつき平均の比であり、(12)式と類似の値をとるのは当然ともいえる。

このように、河道効果を無視し、斜面長を従来の方法である(1)式によって決定することにすれば、実測資料から同定される等価粗度の値は平均斜面長に反比例することになる。これは、永井・角屋〔1981〕らの実流域での検討によって実証された。

3.5.3 場および定数の集中化方式の検討

本研究で提案した場および定数の集中化方式をテストするために、荒倉流域を対象にして数値シミュレーションを行なった。斜面の粗度係数の値を $1.0 \text{ (m}^{-1/3} \text{ sec)}$ ，河道の粗度係数を $0.04 \text{ (m}^{-1/3} \text{ sec)}$ とし、(7)式中の m ， K の値は、上田の研究〔1961〕を参考

にして、

$$m = 1.45, \quad K = 0.402 \quad F_w^{-0.114} (m^{-7/30})$$

を用いた。ただし、 F_w は当該河道区分上流端より上流域の面積と、河道区分下端より上流域の面積の平均値を km^2 単位で表わしたものである。

図3.3(a)～(c)は、本研究で展開した場合および定数の集中化方式を適用して、荒倉流域下流端の流出流量をKinematic wave法によってシミュレーションを行なった例である。結果は良好であって、本研究で示した場合および定数の集中化方式が妥当であることを示している。

3.5.4 斜面粗度係数の推定

前節では、斜面粗度係数を既知として数値シミュレーションを行なったが、斜面粗度係数が未知であって実績との検証で斜面粗度係数を同定しなければならない場合もある。この場合、斜面粗度係数を変数としておいて、本研究で示した集中化方式によって出水系モデルを集中化して、その集中化を使って斜面粗度係数を同定することにすれば、計算量も少なくすむ。こうした観点から、荒倉流域において基礎の流域単位網 Ω で斜面粗度係数を $1.0 \text{ m}^{-1/3} \text{ sec.}$ として流出計算する一方、集中化流域単位網では斜面粗度係数を未知としておいて、基礎の流域単位網での流出流量を観測流量とみなして、それから斜面粗度係数を同定した。図3.4にその結果を示す。集中化回数 j が大きくなるにつれて、同定精度が悪くなっているが、概略の値は推定できることを示している。

第4節 河道網構造による集中化

4.1 河道網構造による流域単位の分類

第4章第2節で河道流を河道網構造に即して逐一追跡していく方法を述べた。さらに、河道区分とそれに接続する斜面を流域単位とよぶと、この方法は、流域単位を構成単位とする流域単位網上の雨水の流れの追跡にそのまま適用されることを示した。本節では、この方法による流出モデル（流域単位網モデルとよぶ）を基礎として、河道網構造による集

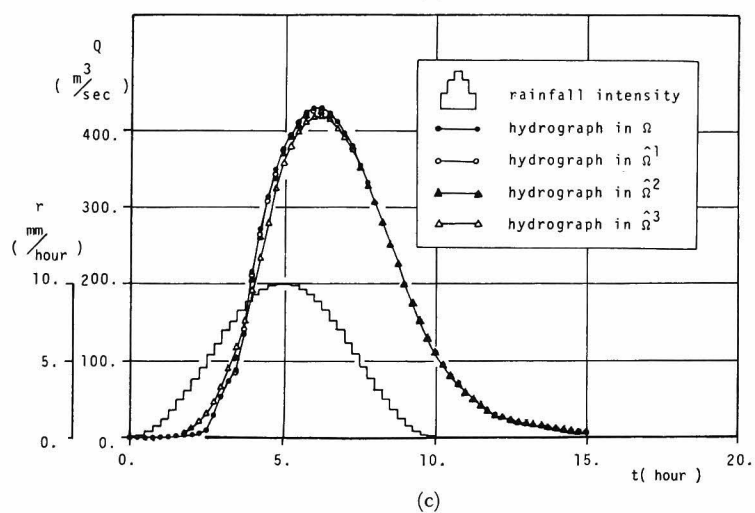
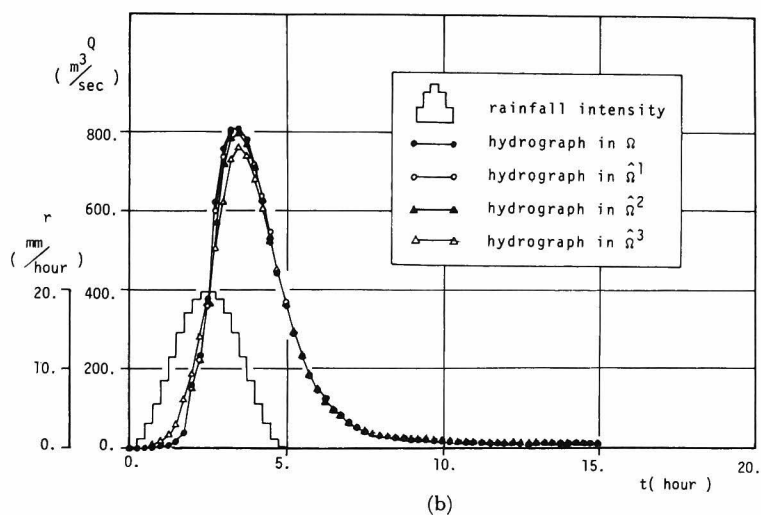
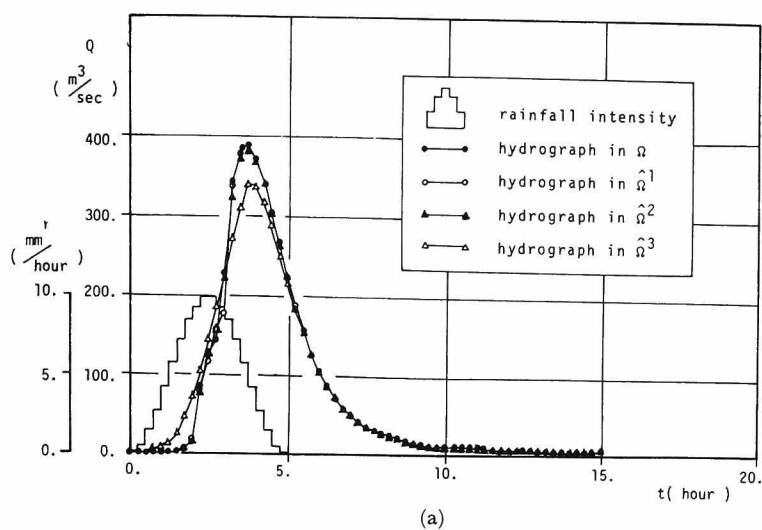


図 3.3 (a), (b), (c) 流出シミュレーション

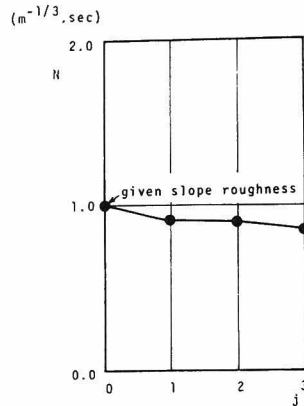


図 3.4 斜面等価粗度の推定

中化を考察する（高棹・椎葉〔1976〕，高棹・池淵・椎葉〔1977〕）。

流域単位網モデルは，対象とする流域内の各流域単位の流出を逐一求めていくものであるが，仮に，いくつかの流域単位群が同一の流出をすることがあらかじめわかっているならば，これらの流域単位群の流出は1度だけ計算するようにして計算量を節減できる。では，どのような場合に，流域単位群の流出が同一であると言えるだろうか。

いま，対象とする流域単位網を \mathcal{Q} と表わし， \mathcal{Q} 上の流域単位の個数を $n(\mathcal{Q})$ とする。各流域単位に1から $n(\mathcal{Q})$ までの識別番号をつけ，識別番号 i の流域単位を $F(i)$ と表わすことにする。 \mathcal{Q} 上の流域単位 $F(i)$ を最下流流域単位とする \mathcal{Q} の部分流域単位網を $\mathcal{Q}\{F(i)\}$ と表わすことにすると， $\mathcal{Q}\{F(i)\}$ 内の河道網構造の違いによって， \mathcal{Q} 内の $n(\mathcal{Q})$ 個の流域単位は，流域単位の部分集合 Z_1, Z_2, \dots, Z_p に分割される。ここに，各 Z_t ($1 \leq t \leq p$)は，部分流域単位網 $\mathcal{Q}\{F(i)\}$ 内の河道網構造が同一であるような流域単位 $F(i)$ の集合である。流域単位網モデルは，各流域単位への降雨，各流域単位の流出モデルのシステムパラメタ（地形諸量・雨水流の抵抗特性値など）を，河道網構造を媒介として，最下流の流域単位の流出に変換するモデルとみなすことができるから，各 Z_t ($1 \leq t \leq p$)で，流域単位の流出モデルのシステムパラメタおよび降雨が同一であれば， Z_t 内の流域単位群の流出は全く同一であるといえる。

厳密にこれらの条件が成立しなくても，システムパラメタや降雨を各 Z_t 内で平均化すると，計算量を節減した近似計算法が得られることになる。

4.2 河道網構造による集中化

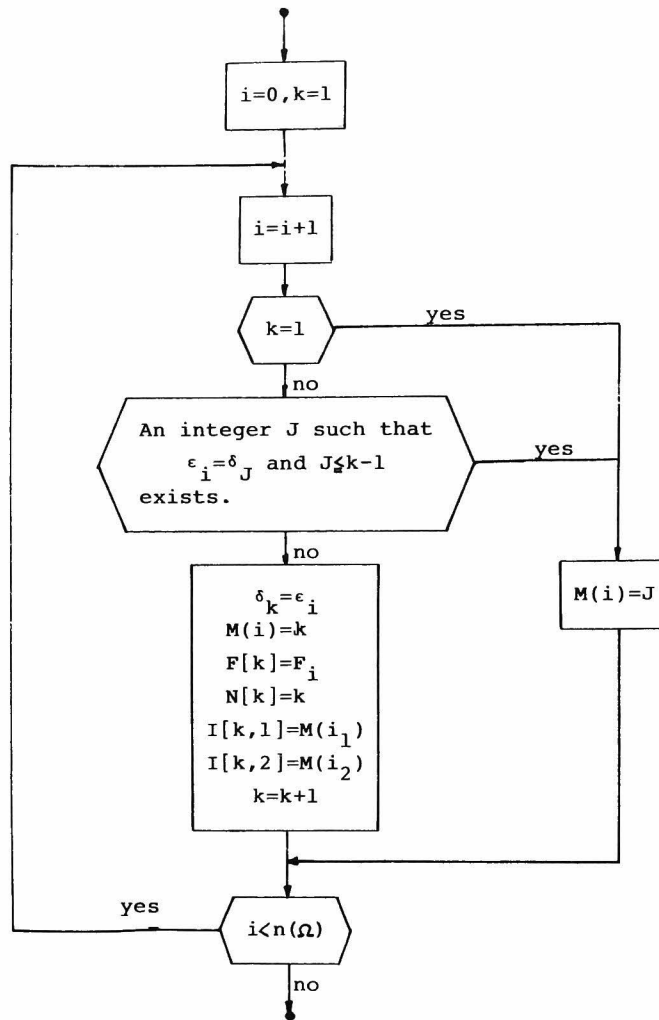
前項で述べたように、全流域単位の集合を河道網構造の差異によって、 Z_1, Z_2, \dots, Z_p に分割し、各 Z_t ($1 \leq t \leq p$) 内で、流域単位の流出モデルのシステムパラメタおよび降雨が同一であると仮定すれば、 Z_t に属する流域単位の流出は同一である。よって、 Z_t に属する流域単位から任意の1個の流域単位を選んでそれを Z_t の代表流域単位とよぶことにすれば、全ての流域単位の流出を逐一計算していくのではなく、 p 個の代表流域単位の流出を求めていけばよいことになる。 p は対象とする流域単位網によって異なるが、第4章2.5でとりあげた由良川上流荒倉流域の例では、流域単位の総数105に対して25であり、一般に流域単位総数に比べるとかなり小さいものと考えてよい。

河道網構造の差異を識別するには、Appendix Cに述べる河道配置数によるとよい。流域単位の流出を逐一求めていくときの計算順序が i の流域単位を F_i 、 F_i を最下流流域単位とする部分流域単位網を $\mathcal{Q}\{F_i\}$ とし、 $\mathcal{Q}\{F_i\}$ 中の河道網の河道配置数を ϵ_i と表わすことにすると、 ϵ_i 、 $i = 1, 2, \dots, n(\mathcal{Q})$ はAppendix Cに述べる規則によって、 i の小さい順に決定していくことができる。

河道配置数 ϵ_i 、 $i = 1, 2, \dots, n(\mathcal{Q})$ が求められているとして、代表流域単位の流出を求める手順を考察しよう。各代表流域単位の流入は、その代表流域単位が最上流にある場合を除いて、他の代表流域単位の流出から求められることに注意して、代表流域単位の計算順序、代表流域単位の流出系列の記憶番地を決定しておくことが必要である。ただし、流出系列の記憶の様式、流出系列の記憶番地は第4章第2節のそれと同じとする。混乱を避けるため、第 k 番目に計算する代表流域単位を第 k ステップの代表流域単位とよび $F[k]$ と表わし、 $F[k]$ の流出系列の記憶番地を $N[k]$ 、 $F[k]$ に流入する代表流域単位の流出系列の記憶番地を $I[k, 1]$ 、 $I[k, 2]$ とかくことにすると、これらは図4.1のようにして決定できる。

第4章第2節図2.8に示した由良川上流荒倉流域の河道網に対応する流域単位網に対して、図4.1の手順を適用した結果を表4.1に示す。表4.1で第1欄は計算ステップ、第2欄は流入系列の記憶番地、第3欄は流出系列の記憶番地、第4欄は河道網構造を同じくする流域単位群の計算順序（第4章第2節表2.2を参照）である。先にも述べたが、荒倉流域では流域単位総数105に対して代表流域単位の個数 p は25となっている。

第4章2.5.3では同流域の全ての流域単位の流出を逐一追跡していく流出シミュレーション



i_1, i_2 : calculation orders of the basin elements which are directly upstream of F_i .

図 4.1 代表流域単位，計算ステップ，流入・流出の記憶番地の決定手順

ヨン結果を示した。ここでは，河道網構造を同じくする流域単位群 Z_t ($t=1, 2, \dots, p$) の中で地形量を平均化し，表 4.1 に示す計算手順で各代表流域単位の流出系列を求め，逐一追跡する場合と比較した結果を述べる。荒倉地点の流出量については，両者のシミュレ

表 4.1 河道網構造による集中化計算手順の荒倉流域への適用結果

k	I[k, t] t=1, 2	N[k]	i such that M(i)=k
1	0, 0	1	1, 4, 6, 8, 10, 11, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 26, 27, 29, 31, 34, 36, 37, 39, 41, 42, 44, 46, 48, 50, 53, 55, 58, 59, 61, 62, 64, 68, 69, 72, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 86, 87, 89, 91, 92, 94, 96, 99, 100, 104
2	1, 1	2	3, 12, 18, 24, 28, 38, 43, 60, 63, 70, 74, 88, 93, 101
3	1, 2	3	5, 20, 30, 40, 45, 65, 76, 90, 95
4	3, 1	4	7, 32, 47, 78, 97
5	1, 4	5	9, 49, 80
6	5, 2	6	13
7	1, 6	7	15
8	7, 3	8	21
9	2, 8	9	25
10	4, 9	10	33
11	10, 1	11	35
12	5, 1	12	51, 82
13	3, 12	13	52
14	1, 13	14	54
15	14, 1	15	56
16	11, 15	16	57
17	2, 3	17	66
18	17, 16	18	67
19	2, 18	19	71
20	12, 1	20	84
21	19, 20	21	85
22	3, 4	22	98
23	2, 22	23	102
24	23, 21	24	103
25	1, 24	25	105

レーション結果はほとんど同一であり，その差は1%程度に過ぎない（高棹・池淵・椎葉〔1977〕）。また，全流域単位の流出系列を逐一求めていく場合について，表4.1で同一ステップに属する流域単位群の流出系列がほとんど同一であることも確認できる。例として，第5ステップに分類されている流域単位，すなわち，計算順位9，49，80をもつ流域単位の流出系列を図4.2に示す。図4.2には，代表流域単位の流出系列を求めていく集中化計算の第5ステップの流出系列も記入している。これらの結

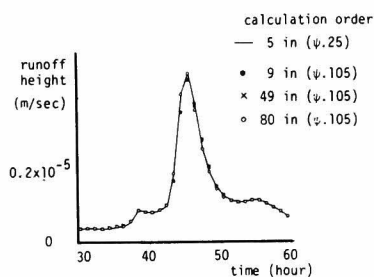


図 4.2 同一の河道網構造をもつ部分流域からの流出系列の比較

果より，河道網構造が同一である部分流域からの出水特性はほとんど同一と考えてよく，河道網構造を基準として集中化計算を行なって十分であるといえる。

第5節 単一要素 Kinematic waveモデルの集中化

5.1 概 要

本節では，指数法則の単一要素 Kinematic waveモデルの集中化と集中化による誤差の構造を明らかにする。第3節および第4節で議論した集中化では，集中化モデルはまだ偏微分方程式で記述されるものであったが，本節では流れのモデル自体の集中化を議論する。結果として得られるモデルは（連立）常微分方程式である（高棹・椎葉〔1982〕）。

Kinematic waveモデルの集中化モデルとして，貯水量が流出量およびその時間微分で与えられる単一貯水池モデルを考えるのも1つの方法であるが（藤田〔1981〕），ここでは，場を有限個の区間に分割し，定常時水面形状から得られる各分割区間の貯水量と流出量の関係式を適用して多段貯水池モデルを構成し，この多段貯水池モデルによる集中化誤差が，場・入力条件および集中化の程度とどのような関係にあるかを検討する。

5.2 指数法則単一要素 Kinematic waveモデルとその無次元化

矩形斜面上の指数法則 Kinematic wave流れは，

$$\partial h / \partial t + \partial q / \partial x = r(t) \quad , \quad z = \alpha h^m, \quad 0 \leq x \leq B \quad (1)$$

でモデル化される。ここに， $\alpha > 0$ ， $m \geq 1$ は定数， B は斜面水平長， $r(t)$ は時刻 t の降雨強度， x は斜面上流端からの水平距離， h は水深， q は単位幅あたりの流量である。斜面流に限らず，上流からの流入がなく横流入を受ける単一河道の指数法則 Kinematic wave流れも，形式的には(1)式と全く同一の式でモデル化されるので，このモデルを指数法則単一要素 Kinematic waveモデルとよぶ。

以下の議論を簡明にするために，降雨継続時間を t_r ， t_r 時間中の平均降雨強度を \bar{r} として，

$$\left. \begin{aligned} x_* &= B, q_* = \bar{r}B, h_* = \{\bar{r}B/\alpha\}^{1/m}, t_* = t_c = \{B/(\alpha\bar{r}^{m-1})\}^{1/m}, \\ r_* &= \bar{r}, T_R = t_r/t_c, P(\tau) = r(T_R\tau)/\bar{r}, R = r/r_*, X = x/x_*, \\ T &= t/t_*, H = h/h_*, Q = q/q_* \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

とにおいて、(1)式を無次元化する。ここに、 t_c は、降雨強度が一定値 \bar{r} をとったときに $x=0$ を出発した雨水擾乱が $x=B$ に到達するのに要する時間、 T_k は、この t_c に相対的な入力継続時間（無次元）、 $P(\tau)$ は降雨強度 $r(t)$ の時間的配分パターンを表わすものである。このとき、(1)式は

$$\partial H / \partial T + \partial Q / \partial X = R(T) = P(T/T_k), \quad Q = H^m, \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (3)$$

と無次元化される。

5.3 多段貯水池モデルによる集中化と集中化誤差の構造

指数法則単一要素 Kinematic wave モデルの無次元化式(3)において、

$$0 = X_{0,K} < X_{1,K} < \cdots < X_{K,K} = 1$$

となる $K+1$ 個の分点 $X_{i,K}$, $i=0, 1, \dots, K$ をとり、区間 $(X_{i-1,K}, X_{i,K})$ での H の積分値を $S_i(\mathbb{D})$, $X_{i,K}$ での H, Q を $H_i(\mathbb{D}), Q_i(\mathbb{D})$ とかき、

$$F_{i,K} = X_{i,K} - X_{i-1,K}, \quad i=1, \dots, K$$

とおくと（図 5.1 参照）、

$$ds_i/dT = F_{i,K} R(T) + Q_{i-1} - Q_i, \quad Q_i = H_i^m, \quad i=1, \dots, K \quad (4)$$

を得る。ただし、 $Q_0 = 0$ と定めるものとする。 H_i が S_i の関数であれば、この式で Kinematic wave モデルが集中化できることになる。一般には、 H_i は S_i の関数として一意的に定まらないが、定常時には H は $X^{1/m}$ に比例するから、

$$H_i = b_i S_i / F_{i,K}, \quad b_i = (m+1) X_{i,K}^{1/m} \quad (5)$$

$$F_{i,K} / \{ m (X_{i,K}^{(m+1)/m} - X_{i-1,K}^{(m+1)/m}) \}$$

なる関係がある。

入力 $R(T)$ の変化が緩やか，すなわち， T_R が大きい時は，水面形状は定常時のそれで近似できるので，(5)式を(4)式の H_i に代入して得られる多段貯水池 (reservoir cascade) モデルで Kinematic wave モデルが集中化される。

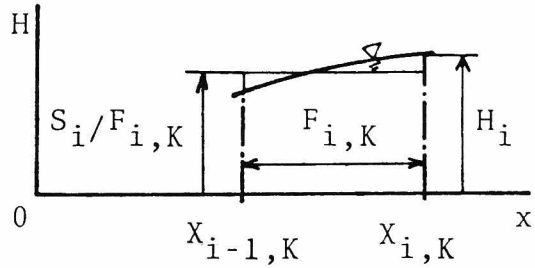


図 5.1 多段貯水池モデルの変数の定義

差分解法における安定性の条件から考

えて，各区間の定常時の擾乱の伝播時間が等しくなるように分点 $X_{i,K}$ ， $i=1, \dots, K-1$ とするのがよい。そうすると， $X_{i,K}$ は再帰的に，

$$X_{K-1,K} = \{(K-1)/K\}^m, \quad X_{i,K} = X_{i,K-1} X_{K-1,K}, \quad i < K \quad (6)$$

として求められることになる。

入力の無次元継続時間 T_R が小さくなると， $R(T) = P(T/T_K)$ の時間的な変化は急激になり，その変化を記憶するために状態量の次元，すなわち区間数 K を増やす必要がある。実際，降雨配分パターンを 2 等辺三角形形状として計算すると， T_R が大きいときは $K=1$ では集中化誤差は小さく（図 5.2(a)）， T_R が小さくなると $K=1$ では集中化誤差が大きくなり（図 5.2(b)）， $T_R=2$ の場合に， $T_R=5$ ， $K=1$ の場合と同程度の誤差に抑えるためには， K を増やして $K=5$ にする必要がある（図 5.2(c)）。ただし，Kinematic wave モデル，多段貯水池モデルによる流出モデルによる流出量をそれぞれ $Q_K(T)$ ， $Q_R(T)$ とするとき，集中化誤差を，

$$e = \max_{T \leq T_E} [|Q_K(T) - Q_R(T)| / \{ Q_K(T) + \max_{T \leq T_E} Q_K(T) \}] \quad (7)$$

で評価するものとする。上式中， T_E は $Q_K(T)$ の累加が流入量の 98% となる時刻である。

降雨配分パターンを2等辺三角形とし、 $m=5/3$ のときの集中化誤差 e の等値線図を描いたものが図5.3である。また、最小2乗法によって求めた集中化誤差 e の近似式は、

$$e = 0.184 / \{ T_k^{0.810} K^{0.452} \} \quad (8)$$

である。いま、斜面流を指数法則単一要素 Kinematic wave モデルで取扱うとし、その等価粗度係数 N 、勾配 θ 、斜面長 B 、平均降雨強度 \bar{r} 、降雨継続時間 t_r が与えられているものとする、 $\alpha = \sqrt{\sin\theta}/N$ 、 $m=5/3$ として、(2)の第6式から T_R が求められるので、図5.3または(8)式を利用すると所要の精度 e に対する貯水池個数 K を求めることができる。 \bar{r} 、 t_r の増大とともに T_R は増大するから、標準的な入力に対して貯水池個数 K を定めておけば、それより規模の大きい入力に対しても精度は保証されることになる。

以上、本節では、指数法則単一要素 Kinematic wave モデルと多段貯水池モデルによって集中化し、その集中化誤差と、場・入力条件・貯水池個数との関係を検討した。河川流域全体を考えるとときには、さらに河道網での合流の効果をも考慮して集中化を議論する必要がある、その解決は容易ではない。

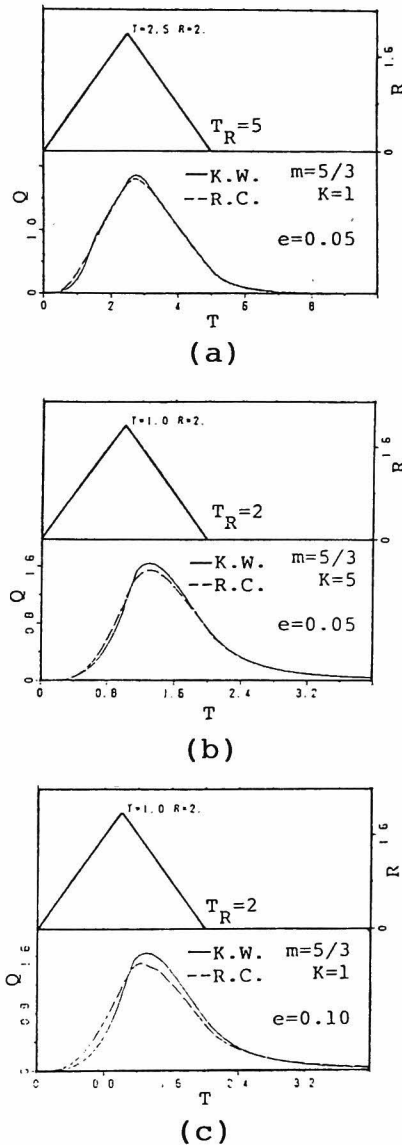


図5.2 Kinematic wave (K.W.)モデルと多段貯水池(R.C.)モデルによる流出の比較

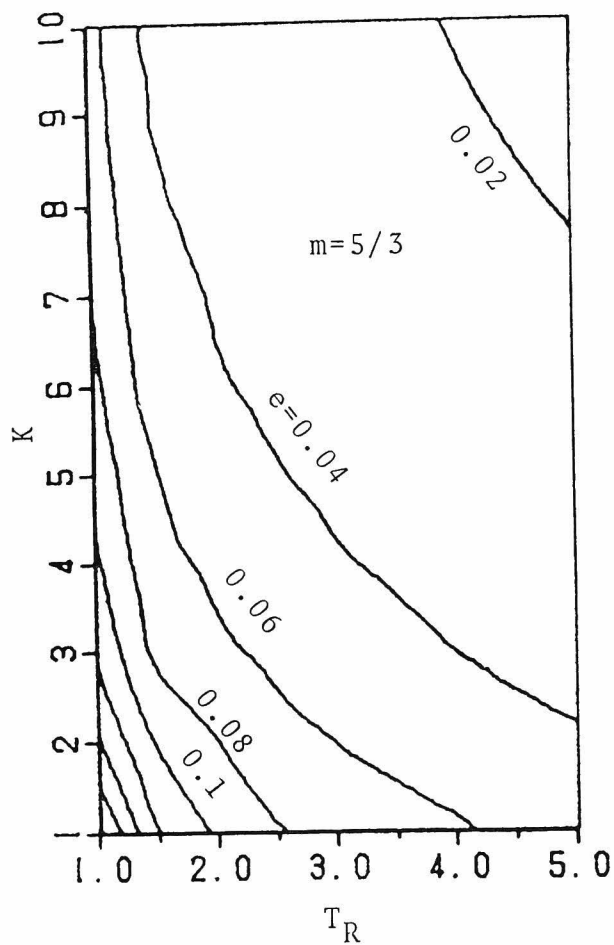


図 5.3 集中化誤差 e の等値線図

第 6 節 要 約

本章では，指数法則 Kinematic wave モデルについて，入力・場・定数・流れのモデルの集中化を検討した。

第 2 節では，河道系の効果を見捨て斜面系の流れが指数法則 Kinematic wave モデルで表わされるとしたときに，空間的に変動する降雨による流出と空間的に一様な降雨

による流出の差を理論的・数値実験的に検討し、前者の方が後者の方より早い時間に集中することを示し、降雨の継続時間に相対的な系の応答時間と降雨の空間変動の標準偏差とを用いて、これらの流出の差を表現する経験式を導いた。

第3節では、斜面および河道の雨水の流れが指数法則 Kinematic wave式でモデル化されるとして、流域場モデルの構成法、流域場モデルおよび定数の集中化法を提示し、その有効性を実証した。

第4節では、対象とする流域の全ての流域単位について、その流域単位を最下流流域単位とする部分流域単位網内の河道網の構造の差異をもとに分類し、各分類内でシステムパラメータを平均化する流出計算法を提示し、その有効性を示した。

第5節では、指数法則単一要素 Kinematic waveモデルを、場を有限個の区間に分割し、定常時水面形状から得られる各分割区間の貯水量と流出量の関係式を用いる多段貯水池モデルで集中化し、この多段貯水池モデルによる集中化誤差が場・入力条件および区間分割数とどのような関係にあるかを明らかにした。

Appendix A 斜面 Kinematic 定数 α_0 と斜面長の等価性

斜面流出が斜面長 B の一様平面上の指数法則 Kinematic wave 式

$$q = \alpha_0 h^{m_0} \quad , \quad \partial q / \partial x + \partial h / \partial t = r_e \quad (1)$$

でモデル化される場合、有効降雨強度 r_e から単位面積あたりの斜面流出強度 r^* への変換において、Kinematic 定数 α_0 と斜面長 B の効果が等価であることを示す。ただし、(1)式中の各変数の意味は第3節(4)式におけるそれと同一である。

(1)式で、変数変換

$$y = x/B \quad , \quad q' = q/B$$

を用いて、 q' 、 h を y 、 t の関数とみなすと、

$$q' = (\alpha_0/B) h^{m_0} \quad , \quad \partial q' / \partial y + \partial h / \partial t = r_e \quad , \quad r^* = q'_y = 1$$

を得る。この r_e から r^* への変換式を支配する定数は α_0/B と m_0 である。

したがって、 m_0 を一定とすれば、Kinematic 定数 α_0 と斜面長 B が種々の値をとっても、 α_0/B が一定値でありさえすれば、 r_e から r^* への変換特性は同一である。この事実の意味する点を明確にするために、かりに、ある流域において、河道効果が無視でき、斜面特性が全流域で一様であるとしてみよう。この想定のもとでは、 r^* は全流域からの単位面積あたりの流出量でもある。このとき、 r_e と r^* の観測値から推定しうる定数は α_0/B (と m_0) であって、 α_0 と B を別々に推定できない。したがって、斜面流の抵抗則に関する定数としての α_0 の意義を確保するには、斜面のサイズを表わす定数 B の意義を明確にしておかねばならない。すなわち、斜面長の定義を明確にする必要がある。

Appendix B 定常線形化による河道効果・斜面効果の表現

第3節で、河道効果・斜面効果を陽に表現するために、入力 r_e が一定値 r_0 をとったときの定常時流速を求め、これを固定して系を線形化したときの単位インパルス応答を用いることにした。ここでは、その具体的な計算式を提示する。特に断わらない限り、ここで用いる記号の意味は第3節におけるそれと同一である。

B. 1 定常線形化による河道効果の表現

斜面効果は無視した場合の流域単位網 \mathcal{Q} を、有効降雨 r_e を入力、 \mathcal{Q} 下流端流出流量を出力とするシステムとみなし、これを定常線形化によって線形化したときの単位インパルス応答を求めよう。斜面効果は無視することにしたので、単位面積あたりの斜面流出強度 r^* は入力 r_e に等しいことに注意する。

最初に、 r_e が一定値 r_0 をとったときの定常時流速を求めよう。流域単位網 \mathcal{Q} 内の河道区分 L_k ($k=1, 2, \dots, n(\mathcal{Q})$) の上流端から河道に沿って測った距離を X_k で表わし、 X_k 地点の定常時流速を $v_k(X_k, r_0)$ と表わすと、第3節(8)式で $r^*=r_0$ とおくことにより、

$$v_k(X_k, r_0) = \alpha_k^{1/m} (U_k - F_k + F_k X_k / L_k)^{(m-1)/m} r_0^{(m-1)/m} \quad (1)$$

を得る。ここに、 α_k は河道区分 L_k の Kinematic 定数 α を表わし、 U_k は部分流域

単位網 \mathcal{Q}_k の集水面積である。

この定常時流速を固定して考えると、 X_k 地点から \mathcal{Q} 下流端までの雨水流下時間 $t_k(X_k, r_o; \mathcal{Q})$ は、(1)式により

$$\begin{aligned} t_k(X_k, r_o; \mathcal{Q}) &= T_k(r_o; \mathcal{Q}) + \int_{X_k}^{L_k} dx_k / v_k(x_k, r_o) \\ &= T_k(r_o; \mathcal{Q}) + r_o^{(1-m)/m} \\ &\quad \cdot Z_k \{ U_k^{1/m} - (U_k - F_k + F_k X_k / L_k)^{1/m} \} \end{aligned} \quad (2)$$

である。ただし、 $T_k(r_o; \mathcal{Q})$ は河道区分 L_k 下流端から流域単位網 \mathcal{Q} 下流端までの雨水流下時間であり、 Z_k は

$$Z_k = m L_k / (\alpha_k^{1/m} F_k)$$

で与えるものとする。(2)式で、 $X_k=0$ とおいたときの右辺第2項は、河道区分 L_k での雨水流下時間を表わし、これを $t_{rk}(r_o)$ とおくと、

$$t_{rk}(r_o) = r_o^{(1-m)/m} Z_k \{ U_k^{1/m} - (U_k - F_k)^{1/m} \} \quad (3)$$

である。(2)式中の $T_k(r_o; \mathcal{Q})$ は、この $t_{rk}(r_o)$ を使って、

$$T_k(r_o; \mathcal{Q}) = L_k \sum_{i \in \mathcal{C}_k(\mathcal{Q})} t_{ri}(r_o) \quad (4)$$

として求められる。ただし、 $\mathcal{C}_k(\mathcal{Q})$ は河道区分 L_k の下流端から流域単位網 \mathcal{Q} 下流端まで雨水が流下するときに通過する河道区分の集合である。(3)、(4)式から、 $t_{rk}(r_o) r_o^{(m-1)/m}$ 、 $T_k(r_o; \mathcal{Q}) r_o^{(m-1)/m}$ は r_o に関係しないことがわかる。

次に、 $T_k(r_o; \mathcal{Q}) < t < T_k(r_o; \mathcal{Q}) + t_{rk}(r_o)$ に対して、 $t_k(X_k, r_o; \mathcal{Q}) = t$ となるような X_k を $X_k(t, r_o; \mathcal{Q})$ と表わすと、(2)式から、

$$\begin{aligned} X_k(t, r_o; \mathcal{Q}) &= (L_k / F_k) [\{ U_k^{1/m} - r_o^{(m-1)/m} \\ &\quad \cdot (t - T_k(r_o, \mathcal{Q})) / Z_k \}^m - U_k + F_k] \end{aligned} \quad (5)$$

である。

以上の準備のもとで、時刻0に強度1のインパルス入力 $r_e = \delta(t)$ があったときの流域

単位 F_k からの流出分 $h_k(t, r_o : \mathcal{Q})$ を求めよう。 $h_k(t, r_o : \mathcal{Q})$ は流域単位 F_k にだけ $r_e = \delta(t)$ の入力があったときの \mathcal{Q} 下流端の流出量であるといってもよい。明らかに、
 $t < T_k(r_o : \mathcal{Q})$ または $t > T_k(r_o : \mathcal{Q}) + t_{rk}(r_o)$ のときには、 $h_k(t, r_o : \mathcal{Q}) = 0$
 であり、 $T_k(r_o : \mathcal{Q}) < t < T_k(r_o : \mathcal{Q}) + t_{rk}(r_o)$ のときは、

$$h_k(t, r_o : \mathcal{Q}) = -(F_k / L_k) dx_k(t, r_o : \mathcal{Q}) / dt$$

であるから、(5)式を代入して、

$$h_k(t, r_o : \mathcal{Q}) = r_o^{(m-1)/m} (m/z_k)^{1/m} [U_k^{1/m} r_o^{(m-1)/m} \cdot \{t - T_k(r_o : \mathcal{Q})\} / z_k]^{m-1} \quad (6)$$

となる。流域単位網 \mathcal{Q} の単位インパルス応答 $h(t, r_o : \mathcal{Q})$ は $r_e = \delta(t)$ のときの \mathcal{Q} 下流端からの流出流量であって、

$$h(t, r_o : \mathcal{Q}) = \sum_{L_k \in \mathcal{Q}} h_k(t, r_o : \mathcal{Q}) \quad (7)$$

に(6)式を代入して得られる。

以上で求める単位インパルス応答の算定式が得られたことになる。さらにこの単位インパルス応答の原点回りの1次モーメント $M(r_o : \mathcal{Q})$ 。

$$M(r_o : \mathcal{Q}) = \int_0^{\infty} t h(t, r_o : \mathcal{Q}) dt$$

の算定式を導いておく。

$$M_k(r_o : \mathcal{Q}) = \int_0^{\infty} t h_k(t, r_o : \mathcal{Q}) dt$$

とおくと、(6)、(7)式により

$$\left. \begin{aligned} M(r_o; \mathcal{Q}) &= \sum_{k=1}^n M_k(r_o; \mathcal{Q}) \\ M_k(r_o; \mathcal{Q}) &= r_o^{(1-m)/m} [z_k F_k U_k^{1/m - \{m F_k / (m+1)\}} \\ &\quad \cdot \{U_k^{(m+1)/m - (U_k - F_k)^{(m+1)/m}} \\ &\quad + F_k T_k(r_o; \mathcal{Q}) r_o^{(m-1)/m}] \end{aligned} \right\} (8)$$

である。先に注意したように $T_k(r_o; \mathcal{Q}) r_o^{(m-1)/m}$ は r_o に無関係であるから、 $M(r_o; \mathcal{Q}) r_o^{(m-1)/m}$ も r_o に無関係である。

B. 2 定常線形化による斜面効果の表現

河道効果を見捨てた場合の流域単位網 \mathcal{Q} を、有効降雨 r_e を入力、 \mathcal{Q} 下流端流出量を出
力とするシステムとみなし、これを定常線形化によって線形化したときの単位インパルス
応答を求めよう。

河道効果を見捨てるので、 \mathcal{Q} 下流端の流出流量は、

$$\sum_{k=1}^n (F_k / B_k) q_k$$

として求められることに注意する。ただし、 q_k は斜面要素 B_k での単位幅あたりの斜面
下流端流出流量である。

この場合の単位インパルス応答の求め方は、河道の場合と同様であるから、結果だけを
要約する。

定常入力を r_o とし、斜面要素 B_k の上流端から下流端までの雨水流下時間を $t_{ork}(r_o)$
と表わすと、

$$t_{ork}(r_o) = r_o^{(1-m_o)/m_o} (m_o B_k^{1/m_o} / \alpha_{ok}^{1/m_o})$$

である。ただし、 α_{ok} は斜面要素 B_k の Kinematic 定数 α_o である。

時刻 0 に強度 1 のインパルス入力 $r_e = \delta(t)$ があつたときの流域単位 F_k からの流出分
を $h_{ok}(t, r_o; \mathcal{Q})$ と表わすと

$$\left. \begin{aligned}
 t < 0 \text{ または } t > t_{\text{ork}}(r_o) \quad & \text{で} \quad h_{\text{ok}}(t, r_o; \mathcal{Q}) = 0 \\
 0 < t < t_{\text{ork}}(r_o) \quad & \text{で} \\
 h_{\text{ok}}(t, r_o; \mathcal{Q}) = r_o^{(m_o-1)/m_o} & \cdot \alpha_{\text{ok}}^{1/m_o} \\
 \cdot B_k \{ B_k^{1/m_o - r_o^{(m_o-1)/m_o}} & \alpha_{\text{ok}}^{1/m_o} t^{1/m_o} \}^{m_o-1}
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

である。流域単位網 \mathcal{Q} の単位インパルス応答，すなわち， $r_e = \delta(t)$ のときの \mathcal{Q} 下流端の流出流量 $h_o(t, r_o; \mathcal{Q})$ は，

$$h_o(t, r_o; \mathcal{Q}) = \sum_{k=1}^n(\mathcal{Q}) h_{\text{ok}}(t, r_o; \mathcal{Q}) \quad (10)$$

に(9)式を代入して得られる。

$h_o(t, r_o; \mathcal{Q})$ の原点回りの1次モーメント $M_o(r_o; \mathcal{Q})$

$$M_o(r_o; \mathcal{Q}) = \int_0^\infty t h_o(t, r_o; \mathcal{Q}) dt \quad (11)$$

を求めるために，

$$M_{\text{ok}}(r_o; \mathcal{Q}) = \int_0^\infty t h_{\text{ok}}(t, r_o; \mathcal{Q}) dt \quad (12)$$

とおくと，(9)～(12)式より，

$$\left. \begin{aligned}
 M_o(r_o; \mathcal{Q}) &= \sum_{k=1}^n(\mathcal{Q}) M_{\text{ok}}(r_o; \mathcal{Q}) \\
 M_{\text{ok}}(r_o; \mathcal{Q}) &= r_o^{(1-m_o)/m_o} \cdot (m_o / (m_o + 1)) \\
 &\quad \cdot (F_k B_k^{1/m_o} / \alpha_{\text{ok}}^{1/m_o})
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

を得る。明らかに， $M_o(r_o; \mathcal{Q}) r_o^{(m_o-1)/m_o}$ は定常線形化に用いる r_o の値に無関係である。

Appendix C 河道網構造の識別指標

第4節で述べるように、河道網構造を識別できる指標があれば出水解析上非常に都合がよい。

藤田〔1975〕は、河道網構造が重複度ベクトルによって表現されることを明らかにしている。ここでは、これとは別に、河道網構造の識別指標を考察し、河道網構造を2進整数で表現できることを見だし、これを河道配置数とよぶ。河道配置数は1次元の数であることと、それが2進数表現である点で計算機の利用に適している。

以下、この河道配置数の定義と計算法を述べる。

C. 1 連結マトリックス

河道網の構造を表すにはグラフによる方法と行列による方法がある。ここでは後者の方法を検討する。

まず、対象とする河道網 \mathcal{Q} から次のようにして正方行列 $A(\mathcal{Q})$ をつくることを考える。すなわち、 \mathcal{Q} の河道区分の個数を n とし、河道区分の全体に1から n までの識別番号をつけ、それらを順に $L(1)$, $L(2)$, \dots , $L(n)$ とする。行列 $A(\mathcal{Q})$ を n 次の正方行列とし、その (k, m) 成分 a_{km} ($1 \leq k, m \leq n$)を

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{河道区分 } L(k) \text{ が河道区分 } L(m) \text{ に流入するとき} & a_{km} = 1 \\ \text{それ以外するとき} & a_{km} = 0 \end{array} \right.$$

と定める。

このように定義された行列 $A(\mathcal{Q})$ は河道網の河道区分の接続関係、すなわち河道網の構造を表す。以後、この $A(\mathcal{Q})$ を河道網 \mathcal{Q} の連結マトリックスとよぶことにする。

河道網の特性から $A(\mathcal{Q})$ は次のような性質をもつ。

(i) $1 \leq m \leq n$ なるすべての m に対して、 $a_{km}=0$ となるような k がただ 1 つ存在する。このとき河道区分 $L(k)$ は最下流の河道区分である。

(ii) 任意に固定した m ($1 \leq m \leq n$) に対して、 $a_{km}=1$ ($1 \leq k \leq n$) となるような k は 2 個あるか、もしくはまったくないかのどちらかである。後者の場合、 $L(m)$ は最上流にある河道区分の 1 つである。

さて、河道網 \mathcal{Q} の河道区分の番号をつけ変えると、連結マトリックス $A(\mathcal{Q})$ も変化し、 \mathcal{Q} に対して一意に定まらない。そこで連結マトリックスに以下のような条件を課することにする。

(iii) $1 \leq k \leq m \leq n$ なる k, m に対しては $a_{km}=0$ である。

(iv) m ($1 \leq m \leq n$) を任意に固定したとき、 $a_{k_j m}=1$ ($1 \leq k_j \leq n, j=1, 2$) なる k_1, k_2 が存在すれば、 k_1, k_2 は連続した整数である。

(v) $a_{k_j m_j}=1, a_{k_{j+1} m_j}=1$ ($1 < k_j < n, 1 \leq m_j \leq n, j=1, 2$), $k_1+1 < k_2$ なるとき、 $m_1 < m_2$ である。

この、(iii), (iv), (v) を整列形の条件とよび、この条件を満たす連結マトリックスを整列形連結マトリックスとよぶことにする。整列形連結マトリックスでは数字 1 が右下りの段階状に並ぶ (図 C. 1(d))。

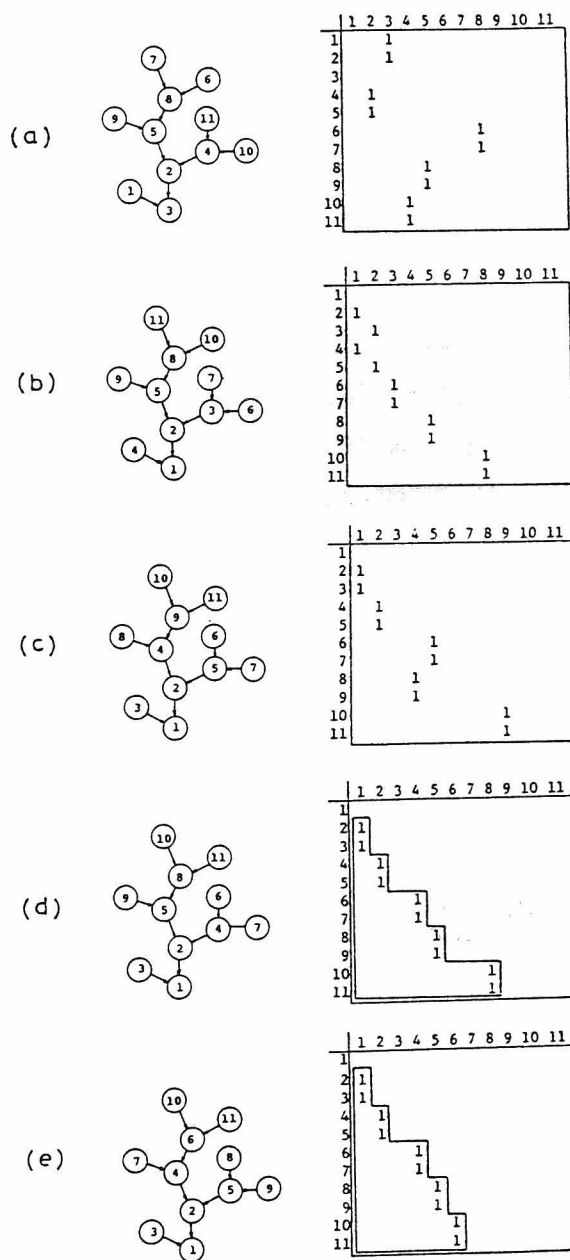
ここで河道網 \mathcal{E} のすべての整列形連結マトリックスの中で上述した階段部分の面積が最小となるものを河道網 \mathcal{E} の標準形連結マトリックスとよび $\widetilde{A}(\mathcal{Q})$ と表わす。

この定義により、 $\widetilde{A}(\mathcal{Q})$ は河道網 \mathcal{Q} に対してただ 1 つに定まるから、2 つの河道網 $\mathcal{Q}^1, \mathcal{Q}^2$ の構造が同一であるか否かは、 $\widetilde{A}(\mathcal{Q}^1) = \widetilde{A}(\mathcal{Q}^2)$ であるか否かによって判定できる。

図 C. 1 に連結マトリックスの例を示す。図 C. 1 の (a), (b), (c) はそれぞれ整列形の条件 (iii), (v) に反する例、条件 (iv), (v) に反する例、条件 (v) に反する例であり、(d) は整列形であるが標準形でない例、(e) は標準形連結マトリックスの例である。いずれも同一の河道網を対象とし、それぞれ対応する河道区分の番号づけを示している。また、連結マトリックスでは 0 を省略して空白にしている。

C. 2 河道網構造の数値比

前項で河道網 \mathcal{Q} の構造は、その標準形連結マトリックス $\widetilde{A}(\mathcal{Q})$ によって一意的に表わされることを述べた。しかし、行列のままでは扱いにくいので $\widetilde{A}(\mathcal{Q})$ と 1 対 1 に対応する数値化



図C. 1 連結マトリックスの例

された指標を考えることが望ましい。このような指標を得るために以下のように考える。

$A(Q)$ を河道網 Q の整列形連結マトリックスとし、 Q の河道区分の個数を n とする。このとき、 $A(Q)$ の第 j 例($1 \leq j \leq n$)に1があるかないかにしたがって、 $\varepsilon_j = 1$ または 0 と定義した n 項数列 $\{\varepsilon_j\}$ から、2進整数 $\varepsilon\{A(Q)\}$,

$$\varepsilon\{A(Q)\} = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \times 2^{j-1}$$

をつくり、この $\varepsilon\{A(Q)\}$ を $A(Q)$ の2進数表現とよぶことにする。たとえば、 Q 、 $A(Q)$ を図C. 1(d)に示すものとすれば、 $\varepsilon\{A(Q)\} = 10011011_{(2)}$ である。ただし、添字(2)は2進法による表示であることを示すものとする。

逆に、 $\varepsilon\{A(Q)\}$ が与えられれば、前項でのべた連結マトリックスの性質(i), (ii), 整列形の条件(iii), (iv), (v)を考慮して整列形連結マトリックス $A\{E\}$ が定まる。ゆえに、整列形連結マトリックス $A(Q)$ とその2進数表現 $\varepsilon\{A(Q)\}$ とは1対1に対応する。

特に、 $A(Q)$ として $\widetilde{A}(Q)$ をとったときの $\varepsilon\{\widetilde{A}(Q)\}$ を $\varepsilon(Q)$ とかき、河道網 Q の河道配置数とよぶ。 $\varepsilon(Q)$ は $\widetilde{A}(Q)$ と1対1に対応するから、 $\varepsilon(Q)$ は求める河道網構造の識別指標である。たとえば、 Q を図C. 1に示すものとすれば、図C. 1の(e)に示す標準形連結マトリックスから $\varepsilon(Q) = 111011_{(2)}$ となる。

なお、標準形連結マトリックスの定義により、河道網 Q の整列形連結マトリックス $A(Q)$ の全体を A とするとき、

$$\varepsilon(Q) = \varepsilon\{\widetilde{A}(Q)\} = \min_{A(Q) \in A} \{\varepsilon\{A(Q)\}\} \quad (1)$$

が成立する。

さて、この河道配置数の定義を河道区分にまで拡張しておこう。 $L(i)$ を河道網 Q 上の河道区分とし、 $L(i)$ を最下流河道区分とする Q の部分河道網 $Q\{L(i)\}$ を考える。 Q 上の河道区分 $L(i)$ の河道配置数とは、 $\varepsilon(Q\{L(i)\})$ のことである。

C. 3 河道配置数の求め方

河道網 Q の河道配置数 $\varepsilon(Q)$ は、定義によれば Q の標準形連結マトリックス $\widetilde{A}(Q)$ から求められる。しかし Q から $\widetilde{A}(Q)$ を求めることは容易でないから、 $\varepsilon(Q)$ を求める方法を別に考え

た方がより好都合である。

そこで、河道配置数の間の演算 $*$ を以下のように定義する。 X 、 Y をそれぞれ河道網 \mathcal{Q}^X 、 \mathcal{Q}^Y の最下流合流点を同一の合流点としその下流に新たに1個の河道区分をつけ加えてできる河道網を、 $\mathcal{Q}^X \otimes \mathcal{Q}^Y$ と表わす。この表記法を使って河道配置数 $X = \varepsilon(\mathcal{Q}^X)$ 、 $Y = \varepsilon(\mathcal{Q}^Y)$ の間の演算 $*$ を

$$X * Y = \varepsilon(\mathcal{Q}^X \otimes \mathcal{Q}^Y)$$

と定義する。

最上流の河道区分の河道配置数は0であり、任意の河道網は最上流の河道区分から出発して次々に上記に定義した演算 \otimes を有限回行うことによって得られるから、結局演算 $*$ がわかれば任意の河道網の河道配置数を求めることができる。

演算 $*$ を具体例をあげて説明する。たとえば、河道配置数 $X = \varepsilon(\mathcal{Q}^X)$ 、 $Y = \varepsilon(\mathcal{Q}^Y)$ をそれぞれ

$$X = 101011_{(2)} \quad , \quad Y = 1111_{(2)}$$

とする。図C. 2の(a)、(b)に河道網 \mathcal{Q}^X 、 \mathcal{Q}^Y をグラフを用いて表わし、標準形連結マトリックス $\widetilde{A}(\mathcal{Q}^X)$ 、 $\widetilde{A}(\mathcal{Q}^Y)$ を得るような河道区分の番号づけを示す。また、 \mathcal{Q}^X 、 \mathcal{Q}^Y により生成される河道網 $\mathcal{Q}^X \otimes \mathcal{Q}^Y$ を \mathcal{Q}^W とかくことにし \mathcal{Q}^W の河道配置数を W とする。

図C. 2の(c)に \mathcal{Q}^W を示す。

定義により、

$$X * Y = W$$

である。

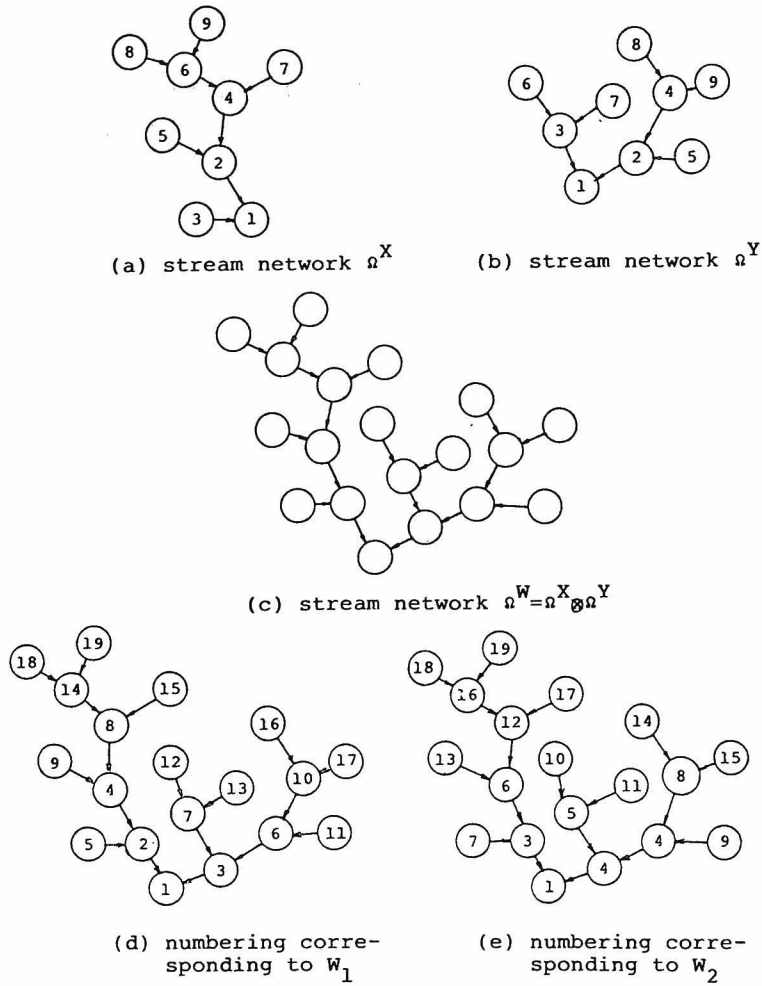
W を求めるために以下にのべるような操作をする。

まず、河道配置数 X の2進法による表示を0と1の数字の並びとみなし、次にのべる原則によって、 X から数字の並びの系列 X_1 、 X_2 、……をつくる。

(i) X の 2^{i-1} ($i \leq 1$)の位の数字を x_i とする；

$$x_i = 0 \quad \text{or} \quad 1,$$

$$X = \cdots x_i \cdots x_3 \ x_2 \ x_1$$



図C. 2 河道配置数の演算*の説明

(ii) X の末梢の数字を X_1 とし、 X から X_1 をとり除いた数字のならば $X^{(1)}$ をつくる；

$$X_1 = x_1 ,$$

$$X^{(1)} = \cdots x_3 x_2$$

(iii) 以下，下記の手順を繰り返す。

数字の並び, $X_1, X_2, \dots, X_i, X^{(i)}$ が得られているものとし,

$$X^{(i)} = \dots x_{n_i+3} x_{n_i+2} x_{n_i+1}$$

とする。ただし, n_i は数字の並び X_1, X_2, \dots, X_i の中の 0 の個数と 1 の個数の和で, $n_1 = 1$ である。

X_i の中に数字 1 が k 個含まれているとする。

$k > 0$ のとき, $X^{(i)}$ の下 $2k$ 桁の数字の並びを X_{i+1} ;

$$X_{i+1} = x_{n_i+2k} x_{n_i+2k-1} \dots x_{n_i+1}$$

として次へ進む。この場合, $n_{i+1} = n_i + 2k$ となる。

$k = 0$ のとき, $X_j = \phi$ ($j \geq i+1$) としてそこで終る。 ϕ は空なることを示す。

したがって, この原則によればいまの例では

$$\begin{cases} X_1 = 1, & X_2 = 01, & X_3 = 01, & X_4 = 01, & X_5 = 00 \\ X_6 = X_7 = \dots = \phi \end{cases}$$

なる数の並びが得られる。 Y についても, 同じ原則から

$$\begin{cases} Y_1 = 1, & Y_2 = 11, & Y_3 = 0001, & Y_4 = 00 \\ Y_5 = Y_6 = \dots = \phi \end{cases}$$

なる数の並びが得られる。

これらの数の並びから, 河道配置数 W を以下の手順により定める。

(Ⅳ) 末桁を 1 とし, X_i, Y_i を交互に並べて 2 進整数をつくる。この並びで ϕ は無視するものとする。

X_1 が先にくるか Y_1 が先にくるかで 2 通りのつくり方があるから, それらを W_1, W_2 とすると

$$\begin{cases} W_1 = Y_i X_i Y_{i-1} X_{i-1} \dots Y_1 X_1 1 \\ W_2 = X_i Y_i X_{i-1} Y_{i-1} \dots X_1 Y_1 1 \end{cases}$$

となる。いまの例では,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 W_1 = \cdots \begin{array}{ccccccccccccccc}
 \phi & \underbrace{0\ 0} & \underbrace{0\ 0} & \underbrace{0\ 1} & \underbrace{0\ 0\ 0\ 1} & \underbrace{0\ 1} & \underbrace{1\ 1} & \underbrace{0\ 1} & \underbrace{1} & \underbrace{1} & 1 \\
 Y_5 & X_5 & Y_4 & X_4 & Y_3 & X_3 & Y_2 & X_2 & Y_1 & X_1 & \\
 \\
 = & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{array} \\
 \\
 W_2 = \cdots \begin{array}{ccccccccccccccc}
 \phi & \underbrace{0\ 0} & \phi & \underbrace{0\ 1} & \underbrace{0\ 0} & \underbrace{0\ 1} & \underbrace{0\ 0\ 0\ 1} & \underbrace{0\ 1} & \underbrace{1\ 1} & \underbrace{1} & \underbrace{1} & 1 \\
 X_5 & Y_5 & X_4 & Y_4 & X_3 & Y_3 & X_2 & Y_2 & X_1 & Y_1 & \\
 \\
 = & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{array}
 \end{array} \right.$$

である。

(V) 求める河道配置数 W は

$$W = \min(W_1, W_2)$$

であり、いまの例では W_1 である。

なお、このようにして、 W が定められる理由は以下の通りである。

先にのべた整列形連結マトリックスとその2進数表現の定義から、 W_1 は \mathcal{Q}^X の最下流河道区分に番号2をつけたときにできる整列形連結マトリックスの中で、階段部分の面積が最小となる整列形連結マトリックスの2進法表現であることを示すことができる。

図C・2の(d)に、この整列形連結マトリックスを得るような河道区分の番号づけを示す。

同様に、 W_2 は \mathcal{Q}^Y は最下流河道区分に番号2をつけたときにできる整列形連結マトリックスの中で、階段部分の面積が最小となる整列形端結マトリックスの2進法表現である。

図C・2の(e)に、この整列形連結マトリックスを得るような河道区分の番号づけを示している。

河道配置数の性質(1)により、求める河道配置数 W は W_1 , W_2 の小さい方である。

参 考 文 献

- 上田年比古(1961): 降雨流出に関する研究, 九州大学学位論文。
- 末石富太郎(1955): 特性曲線法による出水解析について — 雨水の流出現象に関する水理学的研究(第2報) —, 土木学会論文集, 第29号, pp. 74-87.
- 高棹琢馬・池淵周一・椎葉充晴(1977): 河道網構造を考慮した河川流域の出水解析法に関する研究, 京大防災研究所年報, 第20号B, pp. 185-199.
- 高棹琢馬・椎葉充晴(1976): 河川流域の地形構造を考慮した出水系モデルに関する研究, 土木学会論文報告集, 第248号, pp. 69-82.
- 高棹琢馬・椎葉充晴(1982): 単一要素 Kinematic wave モデルの集中化について, 土木学会年次学術講演会概要集, II-337.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・久保省吾(1975): 降雨の空間的分布が出水に及ぼす影響, 土木学会年次学術講演会概要集, II-85.
- 友杉邦雄(1976): 河域地形構成要素の平面量の分布特性に関する研究, 京大防災研究所年報, 第19号B-2, pp. 65-80.
- 豊国永次・渡辺政広(1975): 市街地域の流域モデルに関する考察, 土木学会年次学術講演会概要集, II-96.
- 永井明博・角屋 陸(1981): 洪水流出モデルの最適定数, 京大防災研究所年報, 第24号B-2, pp. 183-196.
- 藤田陸博(1981): 確率流量の算定に関する総合的研究, 文部省科学研究費一般研究C成果報告書
- Sueishi, T. (1963): Runoff Estimation in Storm Sewer System Using Equivalent Roughness, Trans. of JSCE, No. 91.

第6章 状態空間法による流出予測理論

第1節 概 説

流出予測には、水工施設の計画や管理と関連して2つの型が考えられる。1つは計画予知 (Design forecast) であって、施設の機能、配置、および規模決定といったハードな対策の基本となるものである。計画予知では、過去の降雨系列特性の確率・統計的分析を基にして降雨系列を多数発生させ、流出モデルを介して流量系列に変換し、その確率・統計的性質を検討するという方法が有効である。

もう1つの型は、管理のための予知 (Operational forecast) であって、施設の実時間での管理・運用等のソフトな対策の基本となるものである。この場合は、降雨・流出量が時々刻々観測されるのが普通であって、これらの観測情報を利用して、予測を逐次修正していくことが重要である。この型の予測は、現実現象が進行しているときに行われるという意味で実時間 (real-time) 予測、情報が時々刻々入手されるという点で on-line 予測とも呼ばれる。本章では、この型の流出予測を考える。

降雨観測の精度および降雨から流量への変換モデルの精度が高ければ、流出予測問題は降雨予測問題に帰着する。この意味で、実時間流出予測においても降雨流出モデルの精度の向上が果たす役割は大きい。しかし、不十分ではあっても、現有の降雨流出モデル、降雨観測精度を前提にして、可能な限りその流出予測精度を高める努力もまた重要であろう。本章ではこうした方向で流出予測問題を考える。

実時間流出予測では、観測情報、特に流量観測値を用いて予測を逐次修正することが重要である。時々刻々の降雨・流量系列を流出予測に用いる1つの方法は、各時刻の流量が単位時間前までの降雨・流量系列の関数となっているような時系列モデルを用いることである。この場合は、得られた観測値を直接この関数に代入して予測流量が得られる。単位時間後の流量が現時刻の流量と同一であるとする持続的予測は、この方法の最も簡単な例の1つである。時系列モデルによる予測流量の計算は一般に簡単であるが、流出系内部の動的推移の構造を考慮していないため、予測時間が大きくなるにつれ急速に精度が悪化するのが普通である。したがって、できる限り流出系内部の構造を考慮した物理的モデルを

用いながら、しかも時々刻々の観測流量を利用するのが望ましい。ところが、一般に物理的モデルは、流域内部の雨水分布の変化を記述する方程式とその雨水分布の結果としての流出量の表現という形式をとるので、観測流量を流出予測に組入れるのは前述した時系列モデル程容易ではない。しかし、Kalman 以来のフィルタリング・予測理論の発展と計算機の発達によって、このような状態空間型の物理的流出モデルを基礎として、観測流量を生かして予測流量を逐次修正していくことも可能になってきた。

そこで、本章では、従来決定論的に取扱われることの多かった物理的モデルに観測誤差やモデル誤差に対応すると考える確率的外乱を導入して確率過程的状态空間モデルとし、これに Kalman 以来のフィルタリング・予測理論を適用した流出予測理論を展開する。ここで展開する議論は、状態空間型の物理的モデル一般に適用可能なものであるが、具体的な流出予測においては基礎とする流出モデルを特定する必要があり、また流出予測の精度も基礎とする流出モデルに依存することは言うまでもない。

第 2 節 流出システムのフィルタリングと予測の理論

2.1 確率過程的状态空間モデルの構成

従来の物理的な流出モデルのほとんどは、時刻 t とともに変動する有限次元の列ベクトル $x(t)$ を適当に定義することにより、 $x(t)$ の時間的変動を表わす式(1)と、流出量を $x(t)$ の関数として表わす式(2)とで記述される。

$$dx/dt = f(x, r), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$y(k) = g(x(k)) \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad (2)$$

ここに、 f 、 g は適当な次元の一般には非線形の関数であり、 $r(t)$ は時刻 t の降雨強度、 $y(k)$ は時刻 k の流出量である。簡単のため、流出量は単位時間ごとに考えるものとし、時刻 N までの流出を考えるものとする。

このようなモデルでは、任意の時刻 t で $x(t)$ と時刻 t 以後の入力 r の値とを与えれば、将来の x および出力 y の値が決定され、時刻 t 以前にどのような履歴をもっているかとい

うことに関係しない。すなわち、ベクトル $x(t)$ は、時刻 t までの履歴を集約している。このようなベクトルは状態ベクトルとよばれる。状態ベクトルの動的推移を表わす状態方程式と、出力を状態量の関数として表わす出力方程式で動的システムを記述するモデルを状態空間モデルという。

実際には観測誤差やモデル誤差があるから、降雨強度 r の観測値を(1)式に代入しても、計算流量 $g(x(k))$ の系列は実測流量 $y(k)$ の系列とは一致しない。そこで、これらの観測誤差やモデル誤差に対応すると考える確率的外乱項をモデルに導入することを考える。もちろん、導入した確率的外乱項の確率モデルが新たに必要となるが、確率的外乱項を明示することにより、実測流量と計算流量の乖離を流出予測に生かすことができるようになる。

確率的外乱項の導入の様式は種々考えられるが、本研究では確率的外乱項の有色性を容易に考え得る次のような様式を考える。状態の推移に関しては、基本的には(1)式によるものとするが、単位時間ごとに外乱が加わるとする。時刻 k に加える外乱を $v(k)$ 、外乱を加える直前を形式的に k^- とかけば、

$$k-1 \leq t \leq k^- \quad \text{で} \quad dx/dt = f(x, r) \quad (3)$$

$$t = k \quad \text{で} \quad x(k) = x(k^-) + v(k) \quad (4)$$

とするのである。また、出力である流出量は、外乱 $w(k)$ を導入して、

$$y(k) = g(x(k)) + w(k) \quad (5)$$

とする。

(3)～(5)式はより一般に、

$$k-1 \leq t \leq k^- \quad \text{で} \quad dx/dt = f(x, r), \quad (6)$$

$$t = k \quad \text{で} \quad x(k) = u(x(k^-), v(k)), \quad (7)$$

$$y(k) = g(x(k), w(k)) \quad (8)$$

と表わされる。ただし、 U 、 g は適当に定義される関数である。

以後、本節を通して、(7)、(8)式中の $v(k)$ 、 $w(k)$ は、状態ベクトルと独立で、相互に独立な確率分布が既知、平均値 0 の白色系列であると仮定する。(1)、(2)式で記述されるモデル

とは異なり、時刻 t で $x(t)$ と時刻 t 以後の入力 r の値を与えても、確率的外乱項 $v(k)$ 、 $w(k)$ があるために、将来の x 、 y の値は確定しない。しかし、上記の独立性の仮定により、将来の x 、 y の確率分布は決定されるので、 $x(t)$ は状態ベクトルである。(6)～(8)は、状態ベクトルが確率過程的に推移する型のモデル、すなわち確率過程の状態空間モデルである。

2.2 降雨・流量観測，降雨予測と流出予測の手順

確率過程の状態空間モデル(6)～(8)式において、入力である降雨強度 r は時刻とともに変動するのであるが、取扱いを容易にするために、単位時間ごとに一定値をとるとし、時刻 $k-1$ から時刻 k までの降雨強度を r_k とする。単位時間内で降雨強度が変動することの影響は、確率的外乱項 $v(k)$ に含めて考えることにする。この降雨強度 r_k と流出量 $y(k)$ は、時刻 k に既知となるものとする。

流出予測には降雨予測が不可欠である。降雨を発生させるシステムについても確率過程の状態空間モデルを構成して、降雨予測と流出予測とをまとめた全体システムの予測を考えることも可能であるが(高棹・椎葉[1980])、ここでは、降雨予測者の存在を仮定し、各時刻 k に、 M 単位時間後までの降雨強度の系列のベクトル

$$r_{k,M} = (r_{k+1}, r_{k+2}, \dots, r_{k+M})^T \quad (9)$$

の予測値 $\hat{r}_{k,M}$ とその予測誤差の共分散行列 $R_{k,M}$ が、降雨予測者によって与えられるものとする。降雨予測誤差は近似的に正規分布にしたがうものとする。

流出システムの初期状態ベクトル $x(0)$ の確率分布は与えられるものとする。

最初に、時刻 0 に時刻 1, ..., M の流出を予測すること考えてみよう。 $x(0)$ の確率分布、 $v(1), \dots, v(M)$ の確率分布、 r_1, \dots, r_M の確率分布は既知であるから、(6)、(7)式によって $x(1), \dots, x(M)$ の確率分布が求められる。 $w(1), \dots, w(M)$ の確率分布も既知であるから、(8)式によって、 $x(1), \dots, x(M)$ の確率分布から $y(1), \dots, y(M)$ の確率分布が求められることになる。これが、時刻 0 での予測である。

次に、時刻 1 になったとしよう。先に求めた $x(1)$ の確率分布を用いて、全く同様の手順で $x(2), \dots, x(M+1)$ 、 $y(2), \dots, y(M+1)$ の確率分布を求めることも考えられるが、実際には、 r_1 、 $y(1)$ の実現値が得られているので、これを利用すれば先に求めた $x(1)$ の確率分布よりは詳しい $x(1)$ の確率分布が得られることに注意する。すなわち、 r_1 、 $y(1)$ の

実現値を条件とする $x(1)$ の条件つき確率分布を求め、これをもとにして、 $x(2), \dots, x(M+1), y(2), \dots, y(M+1)$ の確率分布を求める方がより正確な予測となる。

一般に、時刻 k までに既知となる情報の列ベクトル Y_k を

$$Y_k = (r_1, y(1)^T, r_2, y(2)^T, \dots, r_k, y(k)^T)^T \quad (10)$$

とすると、 Y_k が得られるという条件つきの状態ベクトル x の条件つき確率分布を求め、これから、 $j > k$ の時刻 j の $x(j), y(j)$ の Y_k を条件とする条件つき確率分布を求めていくのがよい。前者を状態ベクトルのフィルタリング、後者を状態ベクトル・出力の予測という。

これらの条件つき確率分布の推移式は、(6)～(8)式から導かれるのであるが、(6)～(8)式が線形である場合を除いて、それを厳密に解くのは難しい。そこで、本研究では、これらの条件つき確率分布が近似的に正規分布であると仮定して議論する。正規分布では、その期待値ベクトルと共分散行列で分布が決定されるから、この仮定のもとでは条件つき期待値と条件つき共分散行列を求めていけばよいことになる。以後の便宜のために、

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t|k) &= E\{x(t) | Y_k\}, \\ P(t|k) &= E\{(x(t) - \hat{x}(t|k))(x(t) - \hat{x}(t|k))^T | Y_k\} \\ y(j|k) &= E\{y(j) | Y_k\} \\ N(j|k) &= E\{(y(j) - \hat{y}(j|k))(y(j) - \hat{y}(j|k))^T | Y_k\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

とおくことにする。ただし、 $E\{\cdot\}$ は期待値記号、 T は転置記号である。 $\hat{x}(0|0), P(0|0)$ は与えられるものとする。

このとき、流出予測の手順は次のようになる。

- (i) 《初期化》 $k=0$ とおく。
- (ii) 《降雨予測情報の入手と流出予測》 $\hat{r}_{k,M}, R_{k,M}$ を降雨予測者より入手し、 $\hat{x}(k|k), P(k|k)$ をもとにして、 $y(k+i|k), i=1, \dots, M$ を求める。
- (iii) 《観測値の入手とフィルタリング》 $r_{k+1}, y(k+1)$ を入手して、 $\hat{x}(k+1|k+1), P(k+1|k+1)$ を求める。
- (iv) 《 k の更新》 $k+1$ をあらためて k として (ii) へ戻る。

以下，2.3で上記(ii)の部分の手法を，2.4で(iii)の部分の手法を述べる。

2.3 降雨予測情報の入手と流出予測

現在時刻を k とし， $\hat{x}(k|k)$ ， $P(k|k)$ が与えられているとし，降雨予測情報 $\hat{r}_{k,M}$ ， $R_{k,M}$ も入手されたとして， $y(k+i|k)$ ， $N(k+i|k)$ ， $i=1, \dots, M$ を求めることを考えよう。これが流出予測である。

流出量は(8)式によって与えられるから，まず， Y_k が与えられたときの $x(t)$ の条件つき期待値と条件つき共分散行列の推移を求める必要がある。 $x(t)$ の推移式(6)の右辺には確率的入力 r が存在することに注意して，

$$\Sigma(t|k) = E\{(x(t) - \hat{x}(t|k))(r_{k,M} - \hat{r}_{k,M})^T | Y_k\} \quad (12)$$

とおくことにする。 $\Sigma(k|k)$ は零行列である。

$x(t)$ の推移式(6)，(7)式から， $\hat{x}(t|k)$ ， $P(t|k)$ および $\Sigma(t|k)$ の推移式を導こう。

まず，(6)式によって連続時間で推移する部分を考えよう。各 $i=1, \dots, M$ について， $k+i-1 \leq t \leq (k+i)^-$ で $f(x, r)$ は x ， $r_{k,M}$ の関数とみなせるから，これを $F(x, r_{k,M})$ とかくと，(6)式は

$$k+i-1 \leq t \leq (k+i)^- \text{ で } dx/dt = F(x, r_{k,M}) \quad (13)$$

とかける。 $F(x, r_{k,M})$ が x ， $r_{k,M}$ の非線形関数であれば，この式から $\hat{x}(t|k)$ ， $P(t|k)$ ， $\Sigma(t|k)$ の推移式を厳密に導くことはできない。しかし， $x(t)$ ， $r_{k,M}$ が $\hat{x}(t|k)$ ， $\hat{r}_{k,M}$ の近傍にあるとして， $F(x, r_{k,M})$ を $\hat{x}(t|k)$ ， $\hat{r}_{k,M}$ の回りにTaylor展開して $x(t)$ ， $r_{k,M}$ に関して1次の項までとると，

$$F(x, r_{k,M}) \approx F_t x(t) + G_t r_{k,M} + b_t \quad (14)$$

の形におくことができる。ただし， F_t ， G_t ， b_t はTaylor近似における係数行列である。 $F(x, r_{k,M})$ の成分が $x(t)$ の成分の整多項式であるか，または $x(t)$ の各成分の区分的な整多項式であれば，(14)式の F_t ， G_t ， b_t を

$$E\{ \| F(x(t), r_{k,M}) - F_t x(t) - G_t r_{k,M} - b_t \|^2 \} \rightarrow \min \quad (15)$$

となるようにとることができる (Appendix A 参照)。 (15) 式を満たすような F_t, G_t, b_t をとって線形化することを統計的線形化 (statistical linearization, Gelb [1974]) という。統計的線形化が可能であれば、それは Taylor 近似によるよりも偏差の少ない式を与える。 (14) 式の Taylor 近似で、 $x(t), r_{k,M}$ についてさらに 2 次の項までとることも可能である (Appendix A 参照)。

(13) 式右边を (14) 式右边で近似して、Euler の差分公式を適用すると、

$$x(t+\Delta t) = \phi_t x(t) + \psi_t r_{k,M} + c_t \quad (16)$$

の形の推移式が得られる。ただし、 Δt は差分時間間隔であり、 $\phi_t = I + \Delta t F_t$ (I は単位行列)、 $\psi_t = \Delta t G_t$ 、 $c_t = \Delta t b_t$ である。Pade 近似による差分公式を適用すると、さらに高精度で (16) 式の形の表現が得られる (Appendix B)。

(16) 式から、 $\hat{x}(t|k), P(t|k), \Sigma(t|k)$ の推移式

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t+\Delta t|k) &= \phi_t \hat{x}(t|k) + \psi_t \hat{r}_{k,M} + c_t \\ P(t+\Delta t|k) &= \phi_t P(t|k) \phi_t^T + \phi_t \Sigma(t|k) \psi_t^T \\ &\quad + \psi_t \Sigma(t|k) \phi_t^T + \psi_t R_{k,M} \psi_t^T \\ \Sigma(t+\Delta t|k) &= \phi_t \Sigma(t|k) + \psi_t R_{k,M} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

が得られる。

(7) 式によって、瞬間的に $x((k+i)^-)$ から $x(k+i)$ に推移する部分についても、Taylor 近似または可能であれば統計的線形化によって、 $u(x(k+i)^-), v(k+i)$ を $x((k+i)^-)$ と $v(k+i)$ に関する線形式で近似し、係数行列を $U_{k+i}, V_{k+i}, d_{k+i}$ とおいて、

$$x(k+i) = U_{k+i} x((k+i)^-) + V_{k+i} v(k+i) + d_{k+i} \quad (18)$$

とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(k+i|k) &= U_{k+i} \hat{x}((k+i)^-|k) + d_{k+i} \\ P(k+i|k) &= U_{k+i} P((k+i)^-|k) U_{k+i}^T + V_{k+i} \\ &\quad \cdot E\{v(k+i)v(k+i)^T\} V_{k+i}^T \\ \Sigma(k+i|k) &= U_{k+i} \Sigma((k+i)^-|k) \end{aligned} \right\} (19)$$

を得る。

(18), (19)式を適用することによって, $\hat{x}(k+i|k)$, $P(k+i|k)$, $i=1, \dots, M$ が得られる。

次に, $y(k+i)$ の条件つき期待値 $\hat{y}(k+i|k)$, 条件つき共分散行列 $N(k+i|k)$ を求めることになるが, $g(x(k+i), w(k+i))$ をTaylor近似または可能であれば統計的線形化によって $x(k+i)$, $w(k+i)$ に関して線形化すれば, (18)式から(19)式を得たのと全く同様に, $\hat{y}(k+i|k) \cdot N(k+i|k)$ が得られる。

以上では, 降雨系列 $\{r_{k+1}, \dots, r_{k+M}\}$ の予測誤差に相関がある場合を考慮しようように定式化した, 相関が無い場合は, 以上の定式化中の $r_{k,M}$ を $r(t)$ に変更し, $\hat{r}_{k,M}$ を $\hat{r}(t)$, $R_{k,M}$ を $\hat{r}(t)$ の予測誤差分散におきかえ, 各時刻 $k+i$, $i=1, \dots, M$ で $\Sigma(k+i|k)$ を零ベクトルにおきなおすことにするとよい。

2.4 観測値の入手とフィルタリング

時刻 $k+1$ になって, 時刻 k から時刻 $k+1$ までの降雨強度 r_{k+1} , 時刻 $k+1$ の流出量 $y(k+1)$ が既知となった時点で, $\hat{x}(k+1|k+1)$, $P(k+1|k+1)$ を求めることを考える。これがフィルタリングである。実は, 前項で述べた手順によって $\hat{x}(k+1|k)$, $P(k+1|k)$ が求められているのであるが, これは r_{k+1} の値も未知として求められていることに注意する。

そこで, 追加された情報 r_{k+1} , $y(k+1)$ のうち, まず, r_{k+1} だけを先に用いて, $\hat{x}(k|k)$, $P(k|k)$ から, Y_k および r_{k+1} が与えられたときの $x(k+1)$ の条件つき期待値 $\tilde{x}(k+1)$, 条件つき共分散行列 $\tilde{P}(k+1)$ を求める。これは, 前項で述べた手順中で降雨強度を確率変量とせず確定値を用いる点が異なるだけで他は全く同様にして求めることができる。こうして求められた $\tilde{x}(k+1)$, $\tilde{P}(k+1)$ は $y(k+1)$ を除いた情

報による $x(k+1)$ の条件つき期待値，条件つき共分散行列である。

次に， $y(k+1)$ を用いて， $\hat{x}(k+1|k+1)$ ， $P(k+1|k+1)$ を求める。

一般に，正規確率ベクトル x の事前期待値と共分散行列が \tilde{x} ， \tilde{P} で与えられているとき観測値

$$y = Hx + w \quad (20)$$

が得られたときの x の条件つき期待値，共分散行列 \tilde{x} ， \tilde{P} は Kalman フィルターによって求められる。ただし， H は非確率行列， w は x とは独立の正規確率ベクトルである。

Kalman によると，これらの条件つき期待値 \hat{x} ，共分散行列 \hat{P} は，Kalman 利得行列

$$K = \tilde{P}H^T (H\tilde{P}H^T + E\{(w-\bar{w})(w-\bar{w})^T\})^{-1} \quad (21)$$

を用いて，

$$\hat{x} = \tilde{x} + K(y - H\tilde{x} - E\{w\}), \quad \hat{P} = \tilde{P} - KH\tilde{P} \quad (22)$$

として求められる。

今の場合，

$$y(k+1) = g(x(k+1), w(k+1)) \quad (23)$$

であって， $g(x(k+1), w(k+1))$ は必ずしも (20) 式右辺の形ではないが，Taylor 近似または可能であれば統計的線形化によって，係数行列を H_{k+i} ， W_{k+i} ， h_{k+i} として

$$y(k+i) = H_{k+i}x(k+i) + W_{k+i}w(k+i) + h_{k+i} \quad (24)$$

の形に近似することができる。 $y(k+1) - d_{k+i}$ を観測値と考えれば，これは (20) 式と同形の式であるから，(21)，(22) 式を適用して $\hat{x}(k+1|k)$ ， $P(k+1|k)$ が求められることになる。

2.5 モデルの検証と修正

以上に述べた手法によって求められる流出量の予測残差 $\tilde{y}(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1)$ は，

線形化による誤差を無視すれば、平均値が0で、共分散行列が $N(k|k-1)$ で与えられる正規白色系列になる。この性質を利用すると尤度関数が求められるから、確率的外乱の共分散行列やモデルパラメータ中に未知のものがあれば、それを最尤法によって同定することが考えられる。

また、上述した予測残差の性質はモデルの妥当性をチェックするのに利用できる。得られた予測残差の系列がこれらの性質に反する場合には、モデルの修正が必要である。

前項までの議論では、導入した確率的外乱は、状態ベクトルに独立で白色であると仮定したが、この仮定が成立しなければ、当然、予測残差の白色性は保証されない。予測残差のチェックによってモデルの修正が必要になった場合、確率的外乱に対するこの仮定の修正も考える必要がある。(7)、(8)式の表現を考えると、確率的外乱が状態ベクトルに関係する場合には、その関係を関数 u 、 g の中に含ませればよい。また、確率的外乱の有色性を考えるには、たとえば1次の自己回帰モデルを用いるとよい。 $v(k)$ を例にとり、 $v(k)$ の第 j 成分を $v_j(k)$ 、 ρ_j を自己回帰係数、 $e_j(k)$ を白色正規系列として、

$$v_j(k) = \rho_j v_j(k-1) + e_j(k)$$

とモデル化するとしよう。この場合、 $v_j(k)$ を状態量に組み込み、 $e_j(k)$ をあらためて $v_j(k)$ と考えるとよい。こうして、関数 u 、 g を修正し、状態ベクトルの次元を拡大することによって、前項までの議論の枠組みの中で、導入された確率的外乱の状態ベクトルへの依存性と有色性を実質的に考えることができる。

第3節 実流域における流出予測シミュレーション

3.1 概 説

本節では、KWRモデルと仮称する集中型流出モデル(Appendix C)に確率的外乱項を導入して確率過程的状态空間モデルとして前節の理論を適用した流出予測例を示す。

導入する確率的外乱項は、状態量に比例し、有色であるとする。状態量に比例させるのは、状態量が大きいほどモデル誤差も大きいと考えるからであり、有色とするのは、モデルの不完全さが確率的外乱項の系列相関に反映すると考えられるからである。

流出予測には降雨予測情報が不可欠であるが、ここでは具体的な降雨予測システムを構成するのではなく、過去の降雨資料を用いて、想定した精度で“予測値”を確率的に発生させ、これを入手された降雨予測情報とみなして、流出予測の有効性を検証するという方法を採用する。この方法は、単に流出予測手法の検証のためだけでなく、降雨予測精度と流域特性との複合作用によって流出予測精度が決定されていく構造を数値実験によって検討する道を開くものである。

3.2 確率的外乱項の導入

KWRモデル(Appendix C)は、有限個の状態量をもつ状態空間型のモデルであり、状態量の個数を N とし、 N 個の状態量を $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T$ と表わすと、

$$dx_j(t)/dt = f_j(x(t), r(t)) \quad j = 1, \dots, N \quad (1)$$

$$y(k) = g(x(k)) \quad (2)$$

の形に表記できる。ここに、 $r(t)$ は時刻 t の降雨強度、 $y(k)$ は時刻 k の流出量、 f_j 、 $j = 1, \dots, N$ 、 g は適当に定義されたスカラー値の関数である。実は、関数 f_j ($j = 1, \dots, N$)の値は蒸発散能にも依存するのであるが、蒸発散能はThornthwaite式(たとえば、金丸・高棹[1975]を参照)を用いて算定し、単位時間ごとには既知の一定値とするので、 f_j の蒸発散能への依存を陽には示さない。

実際には、蒸発散能の推算誤差を含め観測誤差やモデル誤差があるので、これらの誤差に対応すると考える確率的外乱項を導入する。確率的外乱項の導入の様式は種々考えられるが、ここでは、単位時間ごとに確率的外乱が加わる形でモデル化する。

最初に、状態推移に加える確率的外乱をモデル化しよう。時刻 k に外乱項を付加する直前を形式的に k^- と表わし、 $x_j(k^-)$ から $x_j(k)$ に次式

$$x_j(k) = x_j(k^-) + x_j(k^-) v'_j(k), \quad j = 1, \dots, N \quad (3)$$

で推移するものとする。 $x_j(k^-) x_j(k)$ が付加する確率的外乱項であり、 $v'_j(k)$ は

$$v'_j(k) = \rho_j v'_j(k-1) + v_j(k), \quad j = 1, \dots, N \quad (4)$$

によってモデル化される自己回帰系列とする。ただし、 ρ_j は自己回帰係数、 $v_j(k)$ は平均 0、分散 σ_j^2 の白色正規系列で、 $i \neq j$ のとき $v_i(k)$ と $v_j(k)$ は独立とする。この場合、付加した確率的外乱項 $x_j(k^-)v'_j(k)$ は、状態量に比例し、系列相関を持つことになる。

次に、出力式(2)に付加する確率的外乱項をモデル化しよう。ここでは、付加する外乱項は、 $g(x_1(k), \dots, x_N(k))$ と、平均 0、分散 γ^2 をもつ白色正規変数 $w(k)$ との積として、

$$y(k) = g(x(k)) (1 + w(k)) \quad (5)$$

とする。

状態方程式に付加された確率的外乱項が系列相関をもつことに注意して、 $x_{N+j}(t)$ ($j = 1, \dots, N$) を

$$k-1 \leq t \leq k^- \text{ で } x_{N+j}(t) = v'_j(k-1), \quad (6)$$

$$t = k \text{ で } x_{N+j}(k) = v'_j(k)$$

と定義し、

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_{2N}(t))^T \quad (7)$$

とおくと、確率的外乱項を付加した後の状態方程式、出力式は次の形になる。

$$k-1 \leq t \leq k^- \text{ で } dx/dt = F(X(t), r(t)), \quad (8)$$

$$t = k \text{ で } X(k) = U(X(k^-), v(k)), \quad (9)$$

$$y(k) = G(X(k), w(k)). \quad (10)$$

ただし、 $v(k) = (v_1(k), \dots, v_N(k))^T$ とおき、関数 G は(5)式右辺で定義されるものとし、 $2N$ 次元のベクトル値関数 $F = (F_1, \dots, F_{2N})^T$ 、 $U = (u_1, \dots, u_{2N})^T$ の各成分は、 $j = 1, \dots, N$ について、

$$F_j = f_j(x(t), r(t)), \quad F_{N+j} = 0$$

$$U_j = x_j(k^-) \{ \rho_j x_{N+j}(k^-) + v_j(k) \},$$

$$U_{N+j} = \rho_j x_{N+j}(k^-) + v_j(k)$$

として定義する。(8)～(10)式は、前節の(6)～(8)式と同じ形の式である。

3.3 降雨予測シミュレーション

AMeDAS や雨量レーダの配備に伴い、降雨予測問題の解決は急速に現実化しつつあるが、少くとも現段階では確立された降雨予測方式は存在しないので、前節で述べた流出予測方式を現実の降雨予測方式と結合させてその適否を検討することはできない。そこで、ここでは、過去の降雨出水記録を用いて流出予測方式の有効性を検証することを前提として、降雨記録から逆に降雨“予測値”を指定された精度で再現する降雨予測シミュレータを設定する。

降雨予測シミュレータは、各時刻 k で時刻 $k+i-1$ から時刻 $k+i$ までの降雨強度 r_{k+i} を予測誤差の平均値が 0、分散が指定された大きさ $R(k+i)$ になるように予測した値 \hat{r}_{k+i} を求めて流出予測者に渡す。降雨予測シミュレータは、 r_{k+i} の実現値を使って \hat{r}_{k+i} を発生させるのであるが、その値はもちろん降雨予測者には知らせない。

上述の条件から、

$$E\{\hat{r}_{k+i} - r_{k+i}\} = 0, E\{(\hat{r}_{k+i} - r_{k+i})^2\} = R(k+i) \quad (11)$$

である。降雨予測シミュレータにとっては、 r_{k+i} は既知の値であり、 \hat{r}_{k+i} が発生させるべき確率変数である。この式を満たす \hat{r}_{k+i} の確率分布は種々考えられるが、 $\hat{r}_{k+i} \geq 0$ であるべきこと、 $\hat{r}_{k+i} = 0$ をも有限の確率でとれるようにすることを考慮して、平均値 $m(k+i)$ 、分散 $\sigma^2(k+i)$ をもつ正規確率分布で、負値をとる部分を 0 におきなおした確率分布を考える。ただし、この結果、 \hat{r}_{k+i} が(11)式の条件を満たすように $m(k+i)$ 、 $\sigma^2(k+i)$ を決定するものとする。このような $m(k+i)$ 、 $\sigma^2(k+i)$ の決定方法は高棹・椎葉・宝〔1982〕に示されている。

$m(k+i)$ 、 $\sigma^2(k+i)$ が決定されると、平均値 $m(k+i)$ 、分散 $\sigma^2(k+i)$ をもつ正規乱数を発生させ、負値のときは 0 とおきなおすと予測値 \hat{r}_{k+i} が得られる。

本研究では、特に、降雨予測誤差分散 $R(k+i)$ を、変動係数の 2 乗が予測時間 i に比例するように

$$R(k+i) = a_p^2 \cdot i \cdot r_{k+i}^2 \quad (12)$$

とする。 a_p^2 は比例定数である。

3.4 実流域への適用

3.4.1 対象流域の概要と水文資料

対象流域として由良川上流大野ダム流域を選ぶ。流域面積は 342 km^2 ，最長河道距離は 128 km である。流域の大部分は山地で森林面積が大きく，その過半は潤葉樹林である。

本研究で用いる降雨流量資料は，1970，1971 年の大野ダム地点の毎時雨量，大野ダム毎時流入量である。1970 年の主な出水は 6 月 14 日～18 日に，1971 年の主な出水は 8 月 30 日～9 月 4 日に生起している。1970 年の資料をモデル同定に用い，1971 年の資料を予測の検証に用いる。

3.4.2 モデルパラメタの同定と予測

3.2 で構成した確率過程的流出モデルは，その構成の基礎とした KWR モデルに含まれているパラメタと，導入された確率的外乱項に関するパラメタとをパラメタとしてもっている。前節で述べたように，理論的には，最尤推定法によってこれらのパラメタを同時に推定することが可能であり，かつそれが望ましいが，計算量も大きくなるので，ここでは，KWR モデル中のパラメタをまず同定し，次にそれを固定して，確率的外乱項のパラメタを試行錯誤によって求めるという方法を採用した。

最初に，KWR モデルのパラメタ同定の結果を述べる。同定に用いた期間は，1970 年 6 月 10 日～30 日の間である。同定したパラメタ値を表 3.1 に示す。このうち，最終浸透能 i_{FC} ， i_{UC} はいずれも石原・田中・金丸〔1956〕によって由良川で得られている値， m_C は上田〔1961〕が九州諸河川で用いた値である。河道網系の集中化に際して導入される貯水池個数と集中化誤差との関係は未だ検討の余地があるが，ここでは 3 に固定した。対応する F_1 ， F_2 ， F_3 の値は地形図より求めたものである。残りのパラメタおよび状態量の初期値は，計算流量と観測流量の残差平方和を小さくする方針で，京大大型計算機センターライブラリーのコンプレックス法を用いて探索するとともに，流出再現図による視覚判断をも援用して決定した。図 3.1 が，これらのパラメタ値・初期値を用いた流出量の再現図である。

次に確率的外乱項のパラメタについて述べる。本節(5)式中の確率的外乱項 $w(k)$ の分散

表 3.1 KWRモデルのパラメタ値と初期値

(a) Fixed Parameters		
i_{Fc}, i_{Uc}	0.23	mm/hr
m_c	1.45	
F_1, F_2, F_3	0.346, 0.365, 0.289	
(b) Optimized Parameters		
A_U	0.00559	
M_{tF}	75.3	mm
M_{tU}	18.9	mm
M_{tS}	34.1	mm
M_{fS}	106.	mm
m_{tf}, m_{tU}	1	
D	11.4	mm
k_F	0.0254	1/hr
a_F, a_U	0.713	1/(mm.hr)
p_{tS}	0.399	
c_p	1.25	
(c) Optimized Initial State		
x_{tF}	3.43	mm
x_{fF}	0.135	mm
x_{tU}	3.70	mm
x_{fU}	1.56	mm
x_{tS}	3.56	mm
x_{fS}	44.6	mm
x_{c1}	0.467	mm
x_{c2}	0.781	mm
x_{c3}	0.919	mm

レーションによって与える。降雨の予測精度は、1時間後予測の場合で予測誤差の標準偏差が実測降雨の1/2である場合（3.3の(12)式で $a_p = 0.5$ ）、実測降雨の1倍である場合（ $a_p = 1$ ）の2ケースを考える。

図 3.3～図 3.5 に、 $a_p = 0.5$ のときの1時間後～3時間後流出予測結果を、図 3.6～

図 3.7 は、1970 年 7 月 26 日 0 時～29 日 0 時と、10 月 20 日 0 時～25 日 0 時までの無降雨期間で、5 時間移動平均で真値が推定しうるとして求めた分散の平均値 0.015 を採用して固定した。また、本節(4)式中の自己回帰係数 $\rho_j, v_j(k)$ の分散 σ_j^2 は j によらず一定値 ρ, σ^2 をとるとし、試行錯誤によって ρ, σ^2 を求めた。降雨を既知とし、 $\rho = 0.5$ 、 $\sigma^2 = 0.005$ としたときの1時間後の流出予測値、流出予測値に予測誤差の標準偏差を加減してできる帯状領域（以下1 σ 予測帯とよぶ）と実測流量とを示したものが図 3.2 である。同図では、実測流量のほとんどが1 σ 予測帯に入っており、 σ^2 の値はさらに小さくとってもよいと考えられるが、安全側にとってこの値を用いる。

以上で定めたパラメタ値を用いて、翌年 1971 年の流出予測を試みる。期間は、8 月 30 日 0 時～9 月 4 日 0 時の間とする。予測降雨は、3.3 で与えた降雨予測シミ

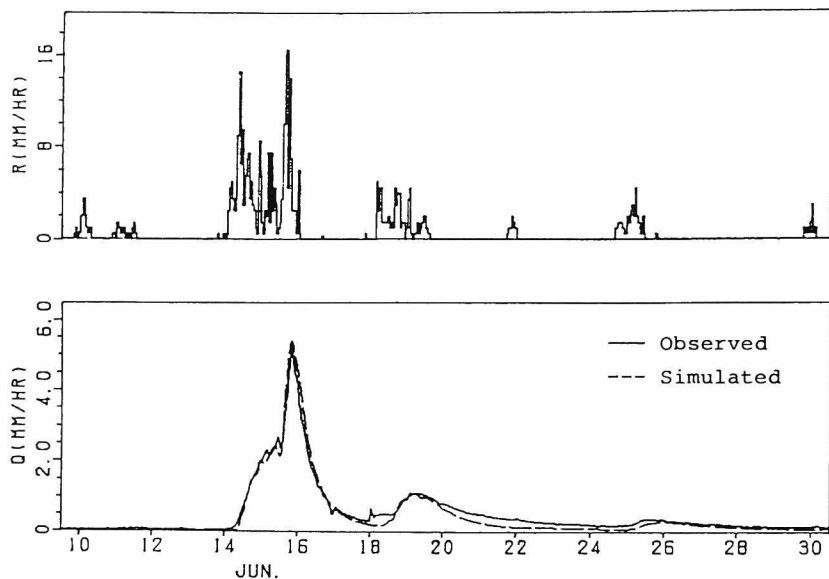


図 3.1 KWRモデルによる流出の再現

図 3.8 に、 $a_p = 1$ のときの 1 時間後～3 時間後流出予測結果を示す。

まず、予測時間の影響をみるために、図 3.3～図 3.6 を比較する。予測時間が大きくなると予測精度も悪くなるが、これに対応して 1σ 予測帯の幅も大きくなっており、ハイドログラフの上昇部を除いて、実測流量のほとんどが 1σ 予測帯の中に入っている。これは、予測精度をも与える本流出予測方式が有効に機能していることを示している。

次に、降雨予測精度の影響をみるため、図 3.3 と図 3.6、図 3.4 と図 3.7、図 3.5 と図 3.8 を比較する。これらの図より、降雨予測精度が悪くなると流出予測の精度も悪化していることがわかる。

また、本流出予測方式の効果をみるために、決定論的モデルによる流出予測（観測流量による修正をしない予測）と比較する。ここでは、降雨予測精度が $a_p = 0.5$ で与えられるときの 1 時間後流出予測結果をみる（図 3.9）。これをみると、決定論的モデルによる流出予測が、実測流量の最初のピークにあたる部分がなく、全体的に流出量が少ないなどの欠点がみられるのに対して、本流出予測方式は、実測流量を比較的良好に予測している。予測降雨は同一のものをういているので、これは、確率的外乱を導入して、フィルタリング理論を用いた本流出予測方式の効果を示すものである。

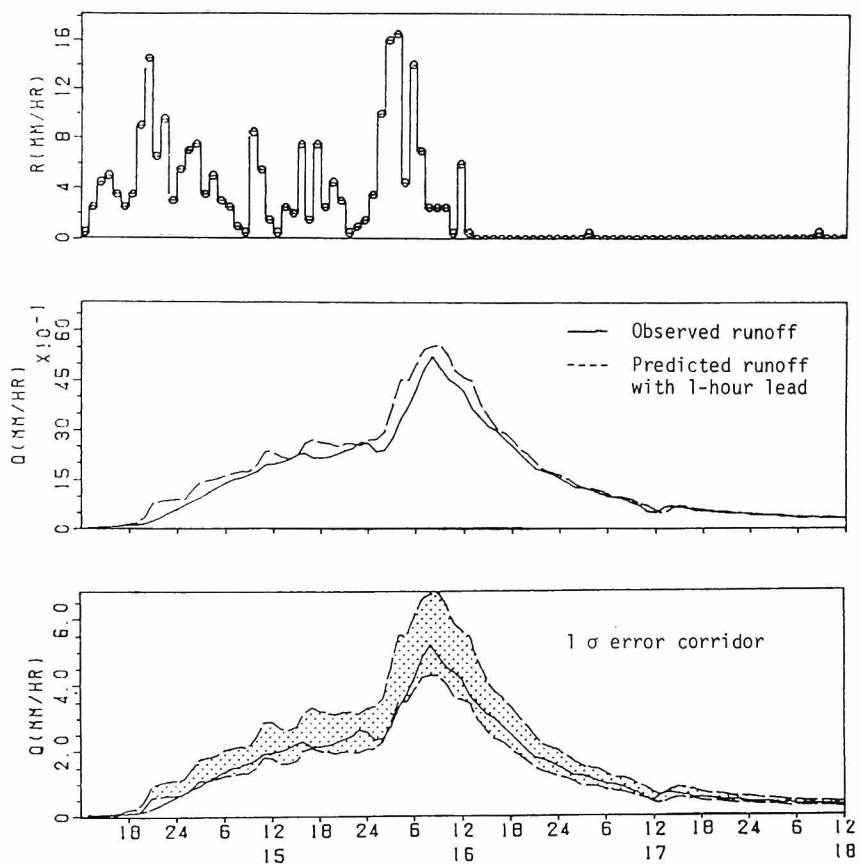
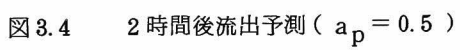


図 3.2 降雨を既知としたときの 1 時間後の流出予測



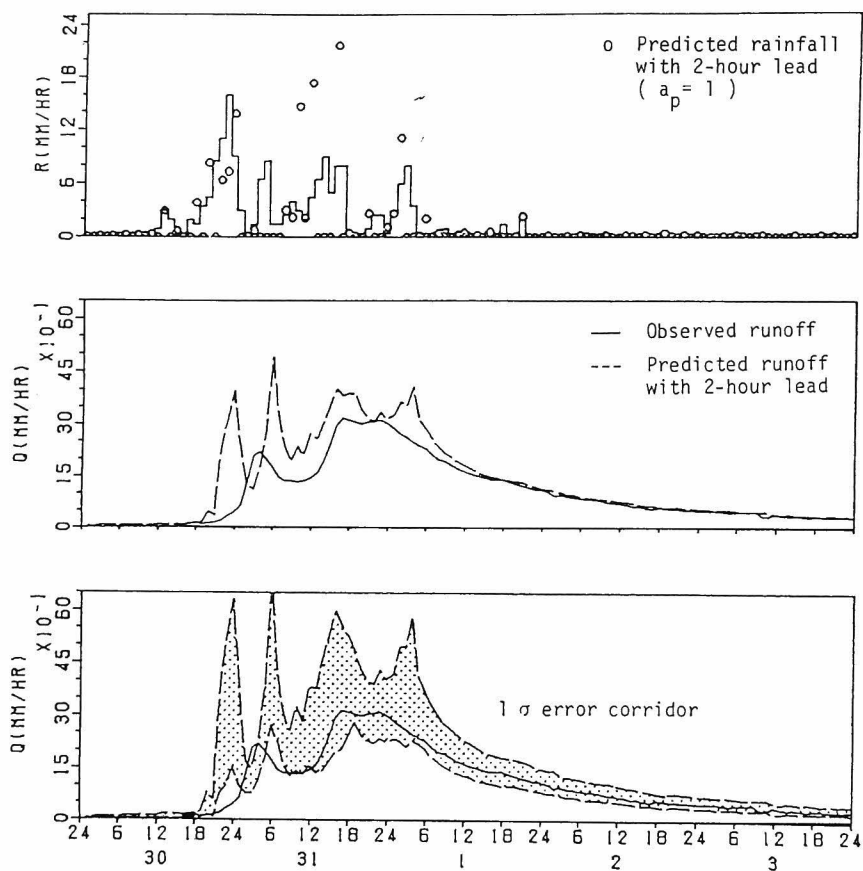


図 3.7 2 時間後流出予測 ($a_p = 1$)

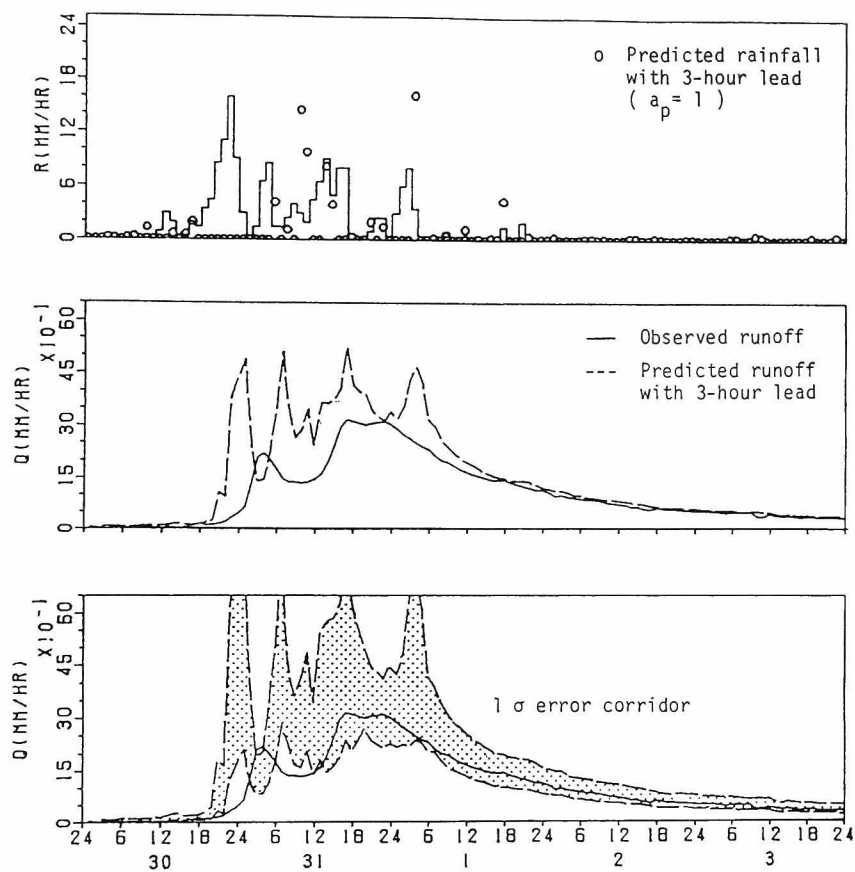


図 3.8 3 時間後流出予測 ($a_p = 1$)

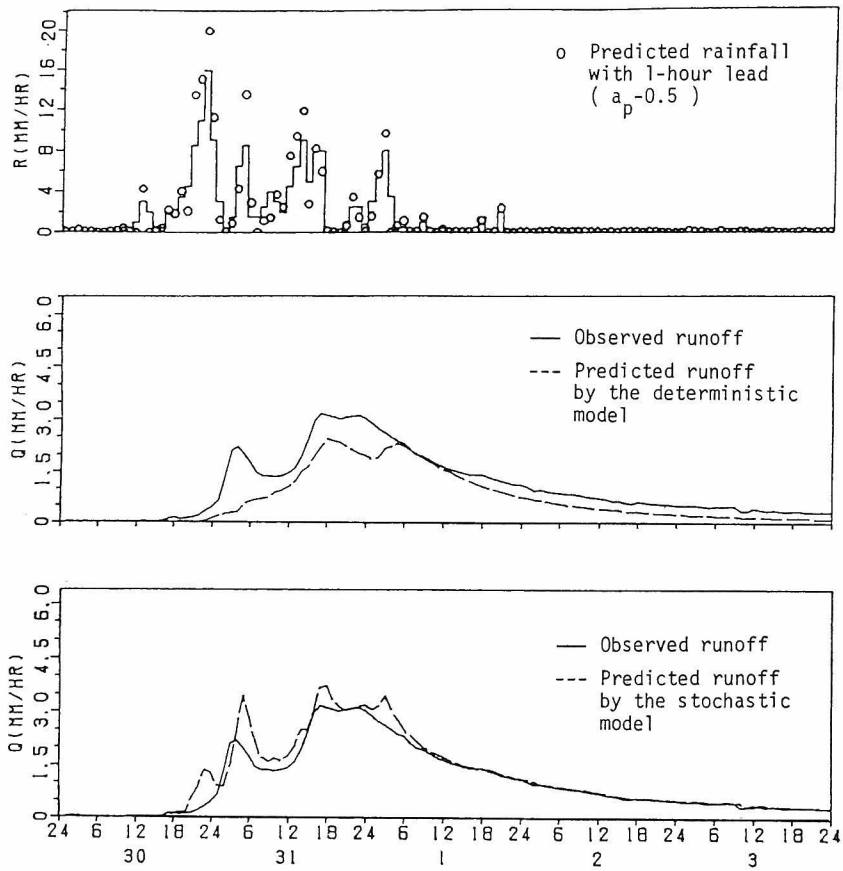


図 3.9 決定論的モデルと確率過程的モデルによる流出予測の比較

第4節 要 約

本章では、従来決定論的に取扱われることの多かった物理的モデルに、観測誤差やモデル誤差に対応すると考える確率的外乱を導入して確率過程の状態空間モデルとし、これを用いる流出予測理論を示した。この方法では、逐次入手される流量観測値を利用して予測が改良されるとともに、予測流量だけでなく予測誤差の分散をも与えるので、実時間での水管理、避難・水防活動に役立つものと期待される。

また、本章では、特に集中型流出モデルの1つであるKWRモデルを具体的に取上げ、実流域での流出予測例を示した。この例では、過去の降雨資料から、降雨予測値を与えられた精度で模擬発生する方法によって、降雨予測システムを代行した。この方法では、降雨予測精度を制御できるので、流出予測精度に降雨予測精度が及ぼす影響を調べることができる。これは、所要の流出予測精度を得るために必要とされる降雨予測精度を求めることを可能にするから、降雨観測・予測システム設計の基礎情報を与えるのに役立つであろう。

Appendix A 統計的線形化の手法

確率変数 X_1, \dots, X_n の関数 $f(X_1, \dots, X_n)$ に対して

$$E \{ |f(X_1, \dots, X_n) - a_1 X_1 - \dots - a_n X_n - b|^2 \} \quad (1)$$

を最小にする定数 a_1, \dots, a_n, b を定めたとき、

$$a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b \quad (2)$$

を $f(X_1, \dots, X_n)$ の統計的線形化式とよぶ。 f がベクトル値関数のときは、各成分ごとに統計的線形化式を考える。(1)式を最小にするような a_1, \dots, a_n, b は正規方程式

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \text{cov}(X_i, X_j) a_j &= \text{cov}(X_i, X_f), \quad i = 1, \dots, n \\ b &= E\{f\} - \sum_{j=1}^n a_j E\{X_j\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

から求められる。ただし、 cov は共分散を表わす。

(3)式を解くのは容易であり，問題は(3)式中の $E\{f\}$ ， $\text{cov}(X_i, f)$ を求めることにある。

(i) $X = (X_1, \dots, X_n)$ が結合正規分布 $N(\bar{X}, P)$ にしたがう $f(X)$ が X_1, \dots, X_n の整多項式である場合。

この場合は， X の特性関数 $\phi(\theta) = E\{\exp(i\theta^T X)\}$ ($\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$, $i^2 = -1$) が

$$\phi(\theta) = \exp\{i\theta^T \bar{X} - \frac{1}{2}\theta^T P \theta\} \quad (4)$$

で与えられることを利用するとよい。たとえば，(4)式を θ に関して 2 回微分して， $\theta = 0$ とおくと， $E\{X_j X_k\} = P_{jk} + \bar{X}_j \bar{X}_k$ を得る。同様にして， X_1, \dots, X_n の高次式の期待値を求めることができるから， $E\{f\}$ ， $E\{X_i, f\}$ を求めることができる。

このように X が結合正規分布をすれば， X_1, \dots, X_n の整多項式の期待値を求めることができるので，たとえば，2.2 の(4)式の Taylor 近似で 2 次項までとることも可能である。

(ii) $f(X)$ が正規分布 $N(\bar{X}, \sigma^2)$ にしたがう 1 変数の関数で，区分的な整多項式である場合。

m が奇数のとき， $E\{(X - \bar{X})^m\} = 0$ ， m が偶数のとき， $E\{(X - \bar{X})^m\} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (m-1) \sigma^m$ であるから， $f(X)$ が X の整多項式である場合は， $E\{f\}$ ， $E\{X, f\}$ を求めることができる。また，自然数 m に対して，

$$G_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x x^{m-1} e^{-x^2} dx$$

とおくと，

$$G_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \text{erf}(x), \quad G_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (1 - e^{-x^2}),$$

$$G_m(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{m-2} e^{-x^2} + \frac{m-2}{2} G_{m-2}(x), \quad m \geq 3$$

が成立つから，誤差関数 $\text{erf}(x)$ が計算できれば， $f(X)$ が区分的な整多項式の場合にも， $E\{f\}$ ， $E\{X, f\}$ を求めることができる。

上記の 2 つのケース以外の場合には， $E\{f\}$ ， $E\{X, f\}$ を求めるのは容易ではなく，

数値積分によらざるを得ないであろう。

Appendix B Pade 近似による差分公式

非線形のベクトル微分方程式

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

の差分公式を考える。

出発点として、 e^x の Pade 近似による 2 階の陽陰混合公式（たとえば、戸川〔1981〕）

$$x(t+\Delta t) - \frac{\Delta t}{2} \dot{x}(t+\Delta t) + \frac{\Delta t^2}{12} \ddot{x}(t+\Delta t) = x(t) + \frac{\Delta t}{2} \dot{x}(t) + \frac{\Delta t^2}{12} \ddot{x}(t) \quad (2)$$

を考える。 $f(x)$ が非線形関数の場合、上式を $x(t+\Delta t)$ について解くことは困難である。

そこで、局所線形化と反復解法によってこの難点を取除く。

時刻 t において、 $f(x)$ を x に関して線形化して、

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = A_t x(t) + b_t \quad (3)$$

と近似するものとする。これに伴ない、(2)式右辺の $\ddot{x}(t)$ も

$$\ddot{x}(t) \approx A_t \dot{x}(t) \approx A_t^2 x(t) + A_t b_t \quad (4)$$

と近似する。次に、時刻 $t+\Delta t$ において、 $f(x)$ の線形化

$$\dot{x}(t+\Delta t) = f(x(t+\Delta t)) = A_{t+\Delta t} x(t+\Delta t) + b_{t+\Delta t} \quad (5)$$

と考える。 $x(t+\Delta t)$ はこれから求めようとしている値であり、通常は $x(t+\Delta t)$ に関する知識なしに $f(x(t+\Delta t))$ の線形化はできないから、まず、第 1 次近似として、 $A_{t+\Delta t} = A_t$ ， $b_{t+\Delta t} = b_t$ とおくことにしておく。(5)式に伴ない、 $\ddot{x}(t+\Delta t)$ も

$$\ddot{x}(t+\Delta t) \approx A_{t+\Delta t} \dot{x}(t+\Delta t) \approx A_{t+\Delta t}^2 x(t+\Delta t) + A_{t+\Delta t} b_{t+\Delta t} \quad (6)$$

と近似される。(3)～(6)式を(2)式に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} x(t+\Delta t) &= \Phi x(t) + c \\ \Phi &= \left[I - \frac{\Delta t}{2} A_{t+\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{12} A_{t+\Delta t}^2 \right]^{-1} \left[I + \frac{\Delta t}{2} A_t + \frac{\Delta t^2}{12} A_t^2 \right] \\ c &= \left[I - \frac{\Delta t}{2} A_{t+\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{12} A_{t+\Delta t}^2 \right]^{-1} \\ &\quad \left[\frac{\Delta t}{2} (b_t + b_{t+\Delta t}) + \frac{\Delta t^2}{12} (A_t b_t - A_{t+\Delta t} b_{t+\Delta t}) \right] \end{aligned} \right\} (7)$$

が得られる。I は単位行列である。こうして得られる $x(t+\Delta t)$ を用いて、 $f(x(t+\Delta t))$ を線形化し、(7) 式を反復適用すれば、 $x(t+\Delta t)$ のよりよい値が得られる。

Euler の差分公式が Δt のオーダーの精度しかもっていないのに対して、これは Δt^5 のオーダーの精度をもっている。

なお、差分時間間隔 Δt は、行列

$$C = \frac{\Delta t}{2} A_{t+\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{12} A_{t+\Delta t}^2$$

の最大固有値が 1 より小さくなるように、 $\max_k \sum_i |C_{ik}|$ 、 $\max_i \sum_k |C_{ik}|$ の少なくとも一方が 1 より小さくなるようにとる（牧之内・鳥居〔1975〕）。

Appendix C KWR モデルの概要

ここでは、第 3 節で用いた集中型流出モデル（KWR モデルと仮称する）の概要を示す。このモデルは、流出系の状態を表わす有限個の状態量を従属変数とし、時刻を独立変数とする一階連立常微分方程式と、流出量を状態量で表わす関数とで記述され、次の特徴を持っている。

- (i) 斜面系と河道網系に分けてモデル化している。
- (ii) 斜面系では、損失、直接流出、間接流出の各機構の部分モデルを持ち、その相互関係を考慮する。
- (iii) 河道網系では、河道網を流下・合流していく過程を統合的に表現する。

C. 1 モデル構造

本モデルは貯留モデルの 1 種である。斜面系に対して、表 C. 1 に示す 6 個の貯留要素

を設定する。河道網系に対しては、第4章第3節で述べた河道網系の統合的表現式(5)～(7)式を積分して有限個数(n_c 個)の貯水池系列で表現する(高棹・椎葉・宝〔1982〕)。計 n_c+6 個の貯留要素の貯水量を流域面積あたりの貯水高で表わした変数が本モデルの状態変数である(表C. 1 参照)。

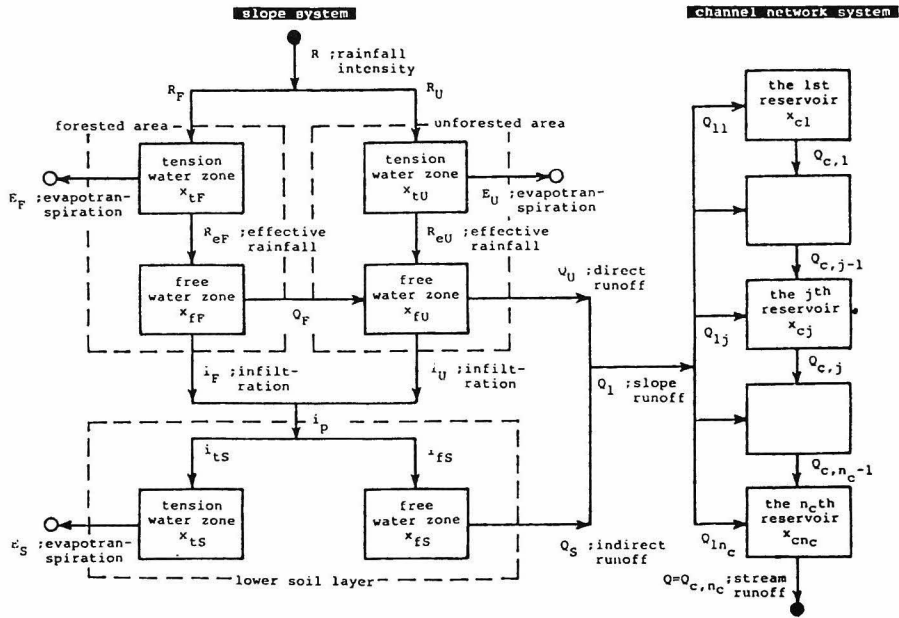
表C. 1 貯 留 要 素

# slope system	
variable	storage element
x_{tF} (mm)	tension water zone of the forested area
x_{fF} (mm)	free water zone of the forested area
x_{tU} (mm)	tension water zone of the unforested area
x_{fU} (mm)	free water zone of the unforested area
x_{tS} (mm)	tension water zone of the lower soil layer
x_{fS} (mm)	free water zone of the lower soil layer

# channel network system	
variable	storage element
x_{cj} (mm)	the j th reservoir element within the reservoir cascade for the representation of the channel network system; $j=1, \dots, n_c$; n_c is the number of reservoir elements

このモデルへの入力は降雨強度 R (mm/hr) と蒸発散能 P (mm/hr) である。各貯留要素間の雨水の移動を図C. 1に示す。図中、矢印に付した記号は単位時間あたりのその方向の雨水の移動を表わしている。 Q (mm/hr) が出力である単位面積あたりの流出強度である。図C. 1に示した雨水移動の関係から得られる各貯水高の連続式を表C. 2に示す。降雨強度 R 、蒸発散能 P 、および各貯水量を用いて表わす雨水移動強度の関数形を表C. 3に示す。関数形の意味について高棹・椎葉・宝〔1982〕を参照されたい。

C. 2 数値解法



図C. 1 貯留要素間の雨水移動

表C. 2 貯水量の連続式

slope system

$$dx_{tF}/dt = R_F - E_F - R_{eF}$$

$$dx_{tU}/dt = R_U - E_U - R_{eU}$$

$$dx_{fF}/dt = R_{eF} - Q_F - i_F$$

$$dx_{fU}/dt = R_{eU} + Q_F - Q_U - i_U$$

$$dx_{tS}/dt = i_{tS} - E_S$$

$$dx_{fS}/dt = i_{fS} - Q_S$$

channel network system

$$dx_{cj}/dt = Q_{1j} + Q_{c,j-1} - Q_{c,j}, \text{ for } j=1, \dots, n_c$$

Note. $Q_{c,0}=0$.

$N = n_c + 6$ とおき, 表C. 1 にあげた貯水量を表わす変数を x_1, x_2, \dots, x_N と表わし, 列ベクトル x を $x = (x_1, \dots, x_N)^T$ と定義する。これに対応して, 表C. 3 に示し

表C. 3 雨水移動強度の関数形とパラメタ

(a) Functional Representation of flows
in storage variables

slope system

input R : rainfall intensity

P : potential evapotranspiration

output Q_1 : slope runoff height per unit time

$$E_F = P_F x_{tF} / M_{tF}, \quad P_F = A_F P$$

$$E_U = P_U x_{tU} / M_{tU}, \quad P_U = A_U P$$

$$E_S = P_S x_{tS} / M_{tS}, \quad P_S = (P - E_F - E_U) M_{tS} / (M_{tF} + M_{tU} + M_{tS})$$

$$R_{eF} = R_F (x_{tF} / M_{tF})^{m_{tF}}, \quad R_F = A_F R$$

$$R_{eU} = R_U (x_{tU} / M_{tU})^{m_{tU}}, \quad R_U = A_U R$$

$$Q_F = k_F x_{fF} \quad \text{for } x_{fF} \leq D$$

$$= k_F x_{fF} + a_F (x_{fF} - D)^2 \quad \text{for } x_{fF} > D$$

$$Q_U = a_U x_{fU}^2$$

$$i_F = A_F i_{FC} P_C I(x_{fF})^{\dagger}, \quad P_C = 1 + c_p (1 - (x_{fS} + x_{tS}) / (M_{fS} + M_{tS}))$$

$$i_U = A_U i_{UC} P_C I(x_{fU})^{\dagger}$$

$$i_{tS} = i_p P_{tS} (1 - x_{tS} / M_{tS}), \quad i_p = i_F + i_U$$

$$i_{fS} = i_p - i_{tS}$$

$$Q_U = a_U x_{fU}^2, \quad a_U = (A_F i_{FC} + A_U i_{UC}) / M_{fS}^2$$

$$Q_1 = Q_U + Q_S$$

channel network system

input Q_1 : slope runoff height per unit time

output Q : stream runoff height per unit time

$$Q_{c,j} = a_c F_j^{1-m_c} (n_c x_{cj})^{m_c}, \quad Q_{1j} = F_j Q_1, \quad \text{for } j=1, \dots, n_c$$

$$Q = Q_{c,n_c}$$

+ $I(x)$ is the step function defined as $I(x)=0$ for $x \leq 0$
and $I(x)=1$ for $x > 0$.

た雨水移動強度の関数形を表C. 2の連続式に代入すると

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

の形のベクトル微分方程式が得られる。 \mathbf{f} はN次ベクトル値関数である。 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ は実は降雨強度 R ，蒸発散能 P にも関係するが，これらが一定値をとると考える時間区間ごとに積分することにし， R ， P への依存を陽に示さない。この微分方程式の解法には，Runge-Kutta 法等の他に，Appendix B で述べた方法が適用できる。

参 考 文 献

- 石原藤次郎・田中要三・金丸昭治(1956)：わが国における単位図の特性について，土木学会誌，第44巻3号。
- 上田年比古(1961)：降雨流出に関する研究，九州大学学位論文。
- 金丸昭治・高棹琢馬(1975)：水文学，朝倉書店。
- 高棹琢馬・椎葉充晴(1980)：状態空間法による流出予測，京都大学防災研究所年報，第23号B-2。
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝馨(1982)：集中型流出モデルの構成と流出予測手法，京都大学防災研究所年報，第25号B-2。
- 戸川隼人(1981)：微分方程式の数値計算，オーム社。
- 日野幹雄(1974)：水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用，土木学会論文報告集，第221号。
- 牧之内三郎・鳥居達生(1975)：数値解析，オーム社。
- Gelb, A. (Ed.) (1974): Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press.

第7章 確率過程的 Kinematic wave モデルと流出予測

第1節 概 説

流出予測理論を取扱った前章では、特に有限個の状態量を持つ状態空間型の流出モデルを想定して理論を展開した。これまでに提案されている流出モデルの大半は、この集中型の状態空間モデルであるが、代表的な物理的モデルとされている Kinematic wave モデルは分布型の状態空間モデルであって前章の理論を直接適用することはできない。そこで、本章で、特別に、確率的外乱項を導入した Kinematic wave モデル（確率過程的 Kinematic wave モデル）をとりあげて、これを用いた予測理論を展開し、状態量である水深分布の平均値と共分散の推移式を導く。もちろん、Kinematic wave モデルを多段貯水池モデルで集中化すれば前章の理論が適用できるし、その方が実際的であると考えられる。しかし、簡単な条件のもとでは、本章で導く平均値・共分散の推移式を解析的に解くことができ、確率過程的 Kinematic wave モデルの特性を理論的に検討できるという利点もある。

第2節 確率過程的 Kinematic wave モデル

本章で考察する確率過程的 Kinematic wave モデルとは、以下の(1)～(4)式で記述されるモデルである。

$$\partial h / \partial t + \partial q / \partial x = r(t) + v(t), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

$$q = \alpha h^m \quad (2)$$

$$h(0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

$$y(k) = \mu F q(1, k) + w(k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

ただし、位置を表わす独立変数 x は 0 と 1 の間の値をとるように無次元化されており、水

深 h , 流量 q は時刻 t と位置 x の関数である。ただし, x が無次元であるから, q は降雨強度の次元をもつ。(2)式は q と h の関係式で $\alpha > 0$, $m > 1$ は定数である。(3)式は境界条件である。(4)式は時刻 k での流出量 $y(k)$ を表す式で, $0 < \mu \leq 1$ は定数, F は流域面積である。確率的外乱 $\{v(t), t \geq 0\}$ は, 初期水深 $\{h(x, 0), 0 \leq x \leq 1\}$ とは独立な白色正規過程, また, 確率的外乱 $\{w(k), k = 1, 2, \dots\}$ は, 初期水深 $\{h(x, 0), 0 \leq x \leq 1\}$, 外乱 $\{v(t), t \geq 0\}$ とは独立な白色正規系列であり, 次のような統計的パラメタをもつことがわかっているとする。

$$E\{v(t)\} = 0, E\{v(t)v(\tau)\} = V\delta(t-\tau), V > 0, t, \tau \geq 0 \quad (5)$$

$$E\{w(k)\} = 0, E\{w(k)w(j)\} = W\delta_{kj}, W > 0, k, j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

ただし, $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数, δ_{kj} はクロネッカーのデルタである。初期水深 $\{h(x, 0), 0 \leq x \leq 1\}$ も正規分布をなすとし,

$$E\{h(x, 0)\} = \hat{h}(x, 0), E\{(h(x, 0) - \bar{h}(x, 0)) \cdot (h(y, 0) - \bar{h}(y, 0))\} = p(x, y, 0) \quad (7)$$

なる平均値関数 $\hat{h}(x, 0)$, 共分散関数 $p(x, y, 0)$ をもつとする。

Fujita・Yamaoka〔1980〕は, 決定論的 Kinematic wave モデルに確率的に与えられる降雨があったときの応答を検討しているが, (1)式で $r(t)$ を降雨強度の平均値, $v(t)$ を降雨強度の確率的変動分と解釈すれば, ここで取扱うモデルは Fujita らが検討したモデルを含むことになる。

第3節 水深・流出量の予測

前章と同様に, 降雨強度は単位時間ごとに一定とし, 時刻 $k-1$ から時刻 k までの降雨強度 r_k と時刻 k の流出量 $y(k)$ は時刻 k に既知になるとする。時刻 k までに既知となった降雨強度と流出量のベクトル $(r_1, y(1), r_2, y(2), \dots, r_k, y(k))^T$ を Y_k と表す。本節では, 全ての確率変数は Y_k が与えられたときの条件つき確率分布のもとで考察する

ことにしていちいち断らない。たとえば、水深の期待値，共分散を $\hat{h}(x, t)$ ， $p(x, y, t)$ とかくが，これらは，

$$\begin{aligned}\hat{h}(x, t) &= E\{h(x, t) | Y_k\} \\ p(x, y, t) &= E\{(h(x, t) - \hat{h}(x, t)) \cdot (h(y, t) - \hat{h}(y, t))^T | Y_k\}\end{aligned}$$

と定義するものである。ただし， $E\{\cdot | Y_k\}$ は Y_k が与えられたときの条件つき平均を表わす。

3.1 確定降雨の場合

本項では，期間 $k \leq t \leq k+1$ での降雨強度 $r(t)$ が確定している場合に，水深 $\{h(x, t), 0 \leq x \leq 1\}$ の条件つき確率分布の推移を考察する。降雨強度が確定していると考えることができるのは，たとえば，時刻 $k+1$ になって，期間 $k \leq t \leq k+1$ の降雨強度が既知となった場合に，流量 $y(k+1)$ を観測する前の水深の事前確率分布を考える場合である。(2)式が非線形であるので，水深の確率分布の推移を厳密に求めることは容易でないので，水深に対して次のような参考関数を定め，その回りに水深の推移式を線形化して議論を展開する。すなわち，まず，初期・境界値問題

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{\alpha \bar{h}^m\} = r(t), \quad \bar{h}(0, t) = 0, \quad \bar{h}(x, k) = \hat{h}(x, k) \quad (8)$$

を満たす参考関数 $\bar{h}(x, t)$ を用いて， $h(x, t)$ の推移式を

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{C(x, t)(h - \bar{h}) + \alpha \bar{h}^m\} = r(t) + v(t), \quad h(0, t) = 0 \quad (9)$$

と近似する。ただし，

$$C(x, t) = \alpha m \{\bar{h}(x, t)\}^m \quad (10)$$

とおいた。(9)式は， h に関して線形であるから，時刻 k での h の条件つき確率分布が正規分布であれば， $t > k$ での水深 $\{h(x, t), 0 \leq x \leq 1\}$ も正規分布にしたがう。よって，(9)式による線形化のもとでは，水深の条件つき平均値関数 $\hat{h}(x, t)$ ，条件つき共

散関数 $p(x, y, t)$ を求めると、水深の条件つき確率分布が求められたことになる。

(9)式より(8)式を引き、 $e(x, t) = h(x, t) - \bar{h}(x, t)$ とおくと

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ c(x, t) e \} = v(t), \quad e(0, t) = 0 \quad (11)$$

となる。(5)式および(8)～(11)式より、 $E\{e(x, t)\} = 0$ 。よって、(8)式で、 $\bar{h}(x, t)$ を $\hat{h}(x, t)$ と書いてもよく、水深の条件つき期待値の推移式は、

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ c \hat{h}^m \} = r(t), \quad \hat{h}(0, t) = 0 \quad (12)$$

で与えられることになる。

一方、(11)式の解を積分形式で表わして、(5)式を用いると、条件つき共分散関数 $p(x, y, t)$ の推移式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} \{ c(x, t) p(x, y, t) \} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \{ c(y, t) p(x, y, t) \} = v \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる。境界条件は $p(0, y, t) = p(x, 0, t) = 0$ で与えられる。

(12)、(13)式を解くのは必ずしも容易ではないが、次のような簡単な条件のもとでは解析的に解くことができる。簡単のため、 $k = 0$ とし、

$$\text{条件: } h(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad r(t) = \bar{r} = \text{一定}, \quad t > 0 \quad (14)$$

を考える。(12)、(13)式に対応する特性微分方程式は、それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} &= \frac{dx}{c(x, t)} = \frac{dh}{r(t)} \\ \frac{dt}{1} &= \frac{dx}{c(x, t)} = \frac{dy}{c(y, t)} = \frac{dp}{v - p \frac{\partial}{\partial x} c(x, t) - p \frac{\partial}{\partial y} c(y, t)} \end{aligned} \quad (15)$$

で与えられるから、(14)式に対応する初期・境界・入力条件のもとで(15)式を解くと、水深の期待値 $\hat{h}(x, t)$ は

$$\left. \begin{aligned} x &\geq (\bar{r}t)^m \alpha / \bar{r} \quad \text{で} \quad \hat{h}(x, t) = \bar{r}t \\ 0 \leq x < (\bar{r}t)^m \alpha / \bar{r} \quad \text{で} \quad \hat{h}(x, t) &= (\bar{r}x / \alpha)^{1/m} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

として求められ、水深の共分散 $p(x, y, t)$ は、

$$\begin{aligned} x, y &> (\bar{r}t)^m \alpha / \bar{r} \quad \text{で} \quad p(x, y, t) = Vt \\ y &< (\bar{r}t)^m \alpha / \bar{r} < x \quad \text{で} \quad p(x, y, t) &= p(y, x, t) \\ &= (\bar{r}x / \alpha)^{1/m} V / \{ \bar{r} (2m-1) \}, \\ x, y &< (\bar{r}t)^m \alpha / \bar{r} \quad \text{で} \quad p(x, y, t) &= V \int_{\max(\xi, \eta)}^t \left\{ \frac{\tau - \xi}{t - \xi} \cdot \frac{\tau - \eta}{t - \eta} \right\}^{m-1} d\tau \\ \xi &= t - (\bar{r}x / \alpha)^{1/m} / \bar{r}, \quad \eta = t - (\bar{r}y / \alpha)^{1/m} / \bar{r} \end{aligned}$$

として求められる。特に、水深の分散 $p(x, x, t)$ は、上式より

$$\left. \begin{aligned} x &> (\bar{r}t)^m \alpha / \bar{r} \quad \text{で} \quad p(x, x, t) = Vt \\ x &< (\bar{r}t)^m \alpha / \bar{r} \quad \text{で} \quad p(x, x, t) &= (\bar{r}x / \alpha)^{1/m} V / \{ \bar{r} (2m-1) \} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

として求められる。(16), (17)式は、Fujita・Yamaoka〔1980〕がモンテカルロ法によって求めた経験式とほとんど同一の結果を与える。(17)式の第2式で $2m-1$ が、Fujita・Yamaokaの結果では m^2 となっている点のみが異なるが、 $2m-1$ と m^2 は $m=1$ の近傍ではほとんど一致する。逆に言えば、この結果は、(8)式による参考関数の回りの線形化によって得られた(12), (13)式の妥当性を傍証するものといえる。

3.2 不確定降雨の場合

本項では、時刻 k から時刻 $k+1$ までの降雨強度 r_{k+1} が不確定で

$$E \{ r_{k+1} \} = \bar{r}_{k+1}, \quad E \{ (r_{k+1} - \bar{r}_{k+1})^2 \} = R$$

なる平均値と分散をもつ場合を考える。これは降雨も予測する場合である。今度は、降雨

r_{k+1} と水深 $h(x, t)$ の条件つき共分散関数 $p_r(x, t) = E\{(r_{k+1} - \bar{r}_{k+1})(h(x, t) - \hat{h}(x, t)) | Y_k\}$ の推移も考える必要がある。(8)式右辺の $r(t)$ を r_{k+1} とおいて、前項と同様の議論をすると、水深の条件つき平均値関数 $\hat{h}(x, t)$ の推移式は

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ \alpha \hat{h}^m \} = r_{k+1}, \quad \hat{h}(0, t) = 0$$

で与えられる。また、水深の条件つき共分散関数 $p(x, y, t)$ ，降雨強度と水深の共分散関数 $p_r(x, t)$ の推移式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} \{ C(x, t) p(x, y, t) \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ C(y, t) \\ \cdot p(x, y, t) \} = V + \frac{\partial}{\partial x} p_r(x, t) + \frac{\partial}{\partial y} p_r(y, t), \\ p(0, x, t) = p(x, 0, t) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_r(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \{ C(x, t) p_r(x, t) \} = R, \quad p_r(0, t) = 0$$

で与えられる。 $p_r(x, t)$ の初期条件は $p_r(x, k) = 0$ である。

ここでは、単位時間後までの降雨強度の予測が与えられた場合を考えたが、前章第2節で考えたように M 単位時間後 ($M \geq 1$) までの降雨強度系列の期待値と共分散行列が与えられた場合にも、ここでの議論を拡張することは容易である。

時刻 $k+1$ での流出流量 $y(k+1)$ は

$$y(k+1) = \mu F \alpha \{ h(1, k+1) \}^{m+w(k)}$$

で与えられるから、 $h(1, k+1)$ の条件つき期待値と分散が $\hat{h}(1, k+1)$ ， $p(1, 1, k+1)$ であることに注意すると、 $y(k+1)$ の条件つき期待値，分散を求めることができる。

第4節 水深のフィルタリング

時刻 $k+1$ になって、時刻 k から時刻 $k+1$ までの降雨強度 r_{k+1} ，時刻 $k+1$ の流出

量 $y(k+1)$ が既知となった時点で、水深の条件つき期待値 $\hat{h}^+(x, k+1) = E \{ h(x, k+1) | Y_{k+1} \}$, 条件つき共分散行列 $p^+(x, y, k+1) = E \{ (h(x, k+1) - \hat{h}^+(x, k+1))(h(y, k+1) - \hat{h}^+(y, k+1))^T | Y_{k+1} \}$ を求めることを考えよう。これがフィルタリングである。

最初に r_{k+1} だけを使って、3.1 で述べた方法で、 $r(t) = r_{k+1}$ とすれば、水深の事前期待 $\hat{h}(x, k+1)$, 事前共分散 $p(x, y, k+1)$ を求めることができることに注意する。

流出量 $y(k+1)$ は

$$y(k+1) = \mu F \alpha \{ h(1, k+1) \}^{m+w(k+1)}$$

で与えられるが、Taylor 近似または統計的線形化によって、右辺を

$$a h(1, k+1) + b + w(k+1)$$

の形に線形化すれば、

$$K(x) = a p(1, x, k+1) / (W + a^2 p(1, 1, k+1))$$

で計算される利得関数 $K(x)$ を用いて、

$$\hat{h}^+(x, k+1) = \hat{h}(x, k+1) + K(x)(y(k+1) - a \hat{h}(1, k+1) - b)$$

$$p^+(x, y, k+1) = p(x, y, k+1) - K(x) a p(1, y, k+1)$$

として事後期待値 $\hat{h}^+(x, k+1)$, 事後共分散 $p(x, y, k+1)$ が求められる。

第 5 節 要 約

本章では、分布型の状態空間モデルである Kinematic wave モデルに確率的外乱項を導入した場合の流出予測理論を述べた。誘導された予測式、すなわち水深の条件つき期待値、条件つき共分散の推移式は偏微分方程式となるので、実際問題への適用においてはその数値解法が問題となろう。第 3 節で示したように、簡単な条件のもとでは、これらの偏微分方程式を解析的に解くことが可能であり、確率過程的 Kinematic wave モデル

の変換構造を理論的に解析することができる。

参 考 文 献

高 棹 琢 馬 ・ 椎 葉 充 晴 (1980) : 状態空間法による流出予測, 京都大学防災研究所年報, 第
23号B-2.

Fujita, M., Michiguchi, T., and Yamaoka, I. (1980): Stochastic Response in a Non-linear Runoff System, Proc. of the 3rd International Symposium on Stochastic Hydraulics, IAHR.

第8章 結 論

1960年代以降、特にここ10年の電算機を中心とする計算・情報処理技術の急速な発展、雨量・水位テレメータ、雨量レーダ等の即時的観測体制の充実に示される、洪水流出系のモデル化と流出予測手法確立のための主体的条件の整備・向上、および、近年の急速な都市化による流出形態変化の把握と激化する中小河川災害の防止・軽減という社会的要請をふまえ、本研究では、雨水流法による従来の流出解析法のより一層の展開と実時間流出予測手法の開発を検討した。

第2章から第5章までは、流出系のモデル化の問題を取扱った。

第2章では、Kinematic wave 理論を要約して提示した。従来、Kinematic wave 流れといえ、指数法則の流量～流積関係式を用いることが多く、その解法もこの指数法則の流量～流積関係式を前提として与えられていることが多いので、より一般的な場合の解法をこの章で示した。

第3章では、山腹斜面の表層付近の流出過程を、Kinematic wave 法を基礎としてモデル化した。特に、第2節では、A層上の地表面流に対して、A層内流量流積関係式と連続的に接続する流量流積関係式を採用して、中間流と地表面流とを統合的に表現した。第3節では、地形パターン関数を導入した Kinematic wave モデルを提示して、地形形状が中間流・地表面流間の流れの転移に及ぼす影響を分析した。さらに、第4節では、裸地域とA層域という流れの場の平面的な分布が、A層域におけるA層とその上の地表面という流れの場の鉛直方向の分布と複合して、直接流出の型を変化させることを示した。また、裸地域を代表するものとして水みちを考え、水みちへの中間流出を考慮するとともに、第2節、第3節で展開した方法を適用した山腹斜面系のモデルを提示して、小流域に適用して、その有効性を示した。

第4章では、河道網系のモデル化を、要素に分割する方法と統合的に表現する方法との対照的な2つの方法で考察した。要素に分割する方法とは、河道網を河道区分に分割し、各河道区分の流れを逐一追跡していくもので、いわゆる流域分割法である。この方法を手計算で実行するのは困難で計算機の利用は避けられないので、計算機による河道流の追跡構造を与えるという形でこの方法を整理した。また、計算機を利用する際、記憶容量の制

約が問題となることが多いので、それを可能な限り節約する方策を与えておいた。河道網系の統合的表現としては、地形パターン開数を導入した Kinematic wave モデルを考え、河道流を逐一追跡していく方法による結果と比較することによって、その妥当性を示した。この表現は、指数法則 Kinematic wave 式による河道流のモデル化と関連して得られたものであり、Meyer の lag-routing に代表される経験的直観によるものと異なって根拠が明確であり、流れの伝播過程の非線形性を考慮するものである。

第5章では、指数法則 Kinematic wave モデルについて、入力・場・定数・流れのモデルの集中化を検討した。第2節では、河道系の効果を無視して斜面系の流れが指数法則 Kinematic wave モデルで表わされるとしたときに、空間的に変動する降雨による流出と空間的に一樣な降雨による流出の差を理論的・数値実験的に検討し、前者の方が後者の方より早い時間に集中することを示し、降雨の継続時間に相対的な系の応答時間と降雨の空間変動の標準偏差とを用いて、これらの流出の差を表現する経験式を導いた。第3節では、斜面および河道の雨水の流れが指数法則 Kinematic wave 式でモデル化されるとして、流域場モデルの構成法、流域場モデルおよび定数の集中化法を提示し、その有効性を実証した。第4節では、対象とする流域の全ての流域単位について、その流域単位を最下流流域単位とする部分流域単位網内の河道網の構造の差異をもとに分類し、各分類内でシステムパラメータを平均化する流出計算法を提示し、その有効性を示した。第5節では、指数法則単一要素 Kinematic wave モデルを、場を有限個の区間に分割し、定常時水面形状から得られる各分割区間の貯水量と流出量の関係式を用いる多段貯水池モデルで集中化し、この多段貯水池モデルによる集中化誤差が場・入力の条件および区間分割数とどのような関係にあるかを明らかにした。

第6章と第7章では実時間流出予測問題を扱った。

第6章では、従来決定論的に取扱われることの多かった物理的モデルに、観測誤差やモデル誤差に対応すると考える確率的外乱を導入して確率過程的状态空間モデルとし、これを用いる流出予測理論を示した。この方法では、逐次入手される流量観測値を利用して予測が改良されるとともに、予測流量だけでなく予測誤差の分散をも与えるので、実時間で水管理、避難・水防活動に役立つものと期待される。また、特に集中型流出モデルの1つである KWR モデルを具体的に取上げ、実流域での流出予測例を示した。この例では、過去の降雨資料から、降雨予測値を与えられた精度で模擬発生する方法によって、降雨予測システムを代行した。この方法では、降雨予測精度を制御できるので、流出予測精度に

降雨予測精度が及ばず影響を調べることができる。これは、所要の流出予測精度を得るために必要とされる降雨予測精度を求めることを可能にするから、降雨観測・予測システム設計の基礎情報を与えるのに役立つであろう。

第7章では、分布型の状態空間モデルである Kinematic wave モデルに確率的外乱項を導入した場合の流出予測理論を述べた。誘導された予測式、すなわち水深の条件つき期待値、条件つき共分散の推移式は偏微分方程式となるので、実際問題への適用においてはその数値解法が問題となろう。第3節で示したように、簡単な条件のもとでは、これらの偏微分方程式を解析的に解くことが可能であり、確率過程的 Kinematic wave モデルの変換構造を理論的に解析することができる。

以上述べたように本論文は、雨水流法による従来の流出解析法のより一層の発展と実時間流出予測手法の開発を検討したものである。本論文が、流出現象の解明とそのモデル化のためだけでなく、水災害の防止・軽減に寄与することを確信して結びとしたい。

謝 辞

本研究を遂行しまとめることができたのは京都大学工学部高埴琢馬教授の御指導・御助力があったからこそと思います。京都大学防災研究所池淵周一教授にも数多くの御助言を載しました。ここに感謝の念を述べ、心からお礼申し上げます。

本研究を進めるにあたり、京都大学防災研究所小尻利治助教授、京都大学工学部宝馨助手の熱心な御討議を載しました。故川村元康君をはじめ、京都大学工学部水工計画学研究室に在籍された諸兄にも協力を載しました。厚くお礼申し上げます。

また、今は亡き石原藤次郎博士の講座に配属を希望しその御指導を受けたことが著者の水文学研究の端緒であります。石原藤次郎先生の御冥福をお祈り致します。

